

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Curry, H. B.: On the use of dots as brackets in logical expressions. *J. Symbolic Logic* 2, 26—28 (1937).

Es werden einige Modifikationen der von Peano zur Strukturierung der logischen Formeln eingeführten Punktsymbolik betrachtet, die gewisse formale Vorteile bieten; so stellt z. B. bei der zuletzt entwickelten Symbolik ein Ausdruck, der bei einer Verteilung von Punkten eine Formel darstellt, bei jeder Verteilung eine Formel dar.
Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Hirano, Jirô: Zum Zerlegungssatz im erweiterten einstelligen Prädikatenkalkül. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 19, 395—412 (1937).

Jede Formel \mathfrak{A} des erweiterten einstelligen Prädikatenkalküls (den man durch Hinzunahme des Gleichheitszeichens und der Gleichheitsaxiome aus dem einstelligen Prädikatenkalkül erhält) läßt sich in sogenannte Primärformeln mit möglichst weit nach innen gerückten Quantoren zerlegen (Beweis bei Hilbert-Bernays, *Grundlagen der Mathematik I*, 179—184; vgl. auch 146—147). Der Verf. gibt einen neuen Beweis dieses Satzes an: Hauptsächlich neu ist hier nur, daß man in einer pränexen, mit \mathfrak{A} äquivalenten Formel alle aufeinanderfolgenden gleichnamigen Quantoren mit einem Schlag, explizit, anstatt durch Wiederholung des rekursiven Verfahrens in das Innere hineinzieht. — Viele Druckfehler.
A. Lindenbaum (Warszawa).

Mihailescu, Eugen Gh.: Recherches sur la négation et l'équivalence dans le calcul des propositions. *Ann. Sci. Univ. Jassy*, I: *Math.* 23, 369—408 (1937).

Das deduktive System der aus Äquivalenz ($E\cdot$) und Negation ($N\cdot$) aufgebauten Logik, das durch die Axiome $EEpq$, $EEEpqrEpEqr$, $EENpNq$, die Einsetzungsregel und die E -Schlußregel bestimmt ist, besitzt 4 Typen von Normalformen, nämlich die beiden in dies. Zbl. 16, 1 zitierten und ihre einfachen Negationen. Die Art der Ablesung des Normalformtyps einer beliebigen E, N -Formel aus ihrer Gestalt führt auf das Ergebnis: 1. Jede Formel, in der das Zeichen N sowie alle Variablen gerade-oft vorkommen, ist ableitbar, 2. die Zufügung einer jeden Formel, welche eine Variable ungerade-oft enthält, macht alle Formeln ableitbar, 3. für jede Formel anderer Gestalt — wie z. B. die „Kontradiktionsformeln“ $EpNp$, $NEpp$ — gilt: sie ist weder ableitbar noch macht ihre Zufügung alle Formeln ableitbar; die Formeln der Gestalt 3 sind deduktionsgleich.
Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Mostowski, Andrzej: Abzählbare Boolesche Körper und ihre Anwendung auf die allgemeine Metamathematik. *Fundam. Math.* 29, 34—53 (1937).

Die von Tarski in „Grundzüge des Systemenkalküls II“ zitierten und in dies. Zbl. 14, 387 angegebenen Ergebnisse des Verf., deren Beweise bisher nicht publiziert waren, werden zusammen mit noch einem Satze über charakteristische Paare bewiesen. Weiter wird eine Reihe von Sätzen insbesondere über die Mächtigkeit der strukturellen Typen abzählbarer deduktiver Theorien (bzw. Boolescher Körper), welche vollständige deduktive Systeme (Primideale) in gegebener Mächtigkeit enthalten, gefolgert (zwei deduktive Theorien heißen vom gleichen strukturellen Typ, wenn sie eine inklusionstreue Abbildung ihrer deduktiven Systeme gestatten). — Aufbauend auf der von Stone (s. dies. Zbl. 10, 81) herausgearbeiteten Analogie von Boolescher Algebra und Topologie — sowie einigen im Zusammenhang hiermit von Tarski angegebenen grundlegenden Entsprechungen algebraischer und metamathematischer Begriffe — bedienen sich die gegebenen Beweise weitgehend topologischer Überlegungen; der Verf. hebt die Wichtigkeit und Angemessenheit dieser Methode hervor.
Arnold Schmidt.

Whiteman, Albert: Postulates for Boolean algebra in terms of ternary rejection. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 293—298 (1937).

The author gives a set of postulates for a ternary relation, (abc) , defined for a, b, c in a class K . In terms of this relation he defines negation by $a' = (aaa)$. He then shows that if an arbitrary element of K be chosen to act as the universal element, then sum and product can be defined so that the resulting system is a Boolean algebra; moreover

$$(abc) = a'b' + b'c' + c'a'.$$

Conversely, this last formula can, in an arbitrary Boolean algebra, be taken as definition of an (abc) for which the author's postulates hold. The consistency and independence of the postulates are also shown by means of models. *H. B. Curry.*

Fraenkel, A.: Über eine abgeschwächte Fassung des Auswahlaxioms. J. Symbolic Logic 2, 1—25 (1937).

Zweck der Arbeit ist, die Unabhängigkeit des allgemeinen Auswahlaxioms von dem „engsten Auswahlaxiom“, das sich auf unendliche disjunkte Mengen von endlichen Mengen bezieht, zu beweisen. Hierzu wird eine Mengenlehre aufgebaut aus der Nullmenge 0, der abzählbaren Menge $Z^* = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}, \dots\}$ und einer unendlichen disjunkten Menge C von „Zellen“ C_v , die ihrerseits unendliche Mengen von „Urelementen“ sind. Aus 0, Z^* , den Urelementen, den C_v und C wird mit Hilfe der gebräuchlichen Axiome einschließlich dem engsten Auswahlaxiom ein Bereich B von Mengen aufgebaut. Eine Menge aus B heißt halbsymmetrisch in bezug auf C_v , wenn sie invariant ist gegenüber jeder geraden Permutation von endlich vielen Elementen von C_v . Es zeigt sich, daß jede Menge aus B halbsymmetrisch ist in bezug auf alle Zellen, mit Ausnahme von höchstens endlich vielen; daher kann es in B keine Auswahlmenge von C geben.

A. Heyting (Enschede).

● **Kraft, Julius: Erkenntnis und Glaube.** Leiden: A. W. Sijthoff's Uitgeversmij N. V. 1937. 32 S. Fl. —75.

Verf. definiert den Glauben so, daß er der Erkenntnis widerstreitet, und fordert dann seine Ausschaltung oder wenigstens Relativierung zugunsten der Erkenntnis. Beziehungen dieser Überlegungen zu wissenschaftlichen Problemen sind nicht zu erkennen.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin).

Bohr, Niels: Kausalität und Komplementarität. (2. internat. Kongr. f. Einheit d. Wiss., Kopenhagen, Sitzg. v. 21.—26. VI. 1936.) Erkenntnis 6, 293—303 (1937).

Es wird eine zusammenfassende, kurze Darstellung der vom Verf. an Hand der allgemeinen Erfahrungen der Quantentheorie entwickelten erkenntnistheoretischen Gesichtspunkte gegeben, wobei besonders auf die Frage der Stellung der biologischen Gesetzmäßigkeiten zu den Prinzipien der Physik eingegangen wird.

O. Klein.

Bernays, Paul: Grundsätzliche Betrachtungen zur Erkenntnistheorie. Abh. Fries'sche Schule, N. s. 6, 277—290 (1937).

These des Verf.: Die miteinander und mit der Physik unvereinbaren Standpunkte des radikalen Apriorismus und Empirismus enthalten die gemeinsame dogmatische Voraussetzung: „Wenn die Vernunft für die physikalische Erkenntnis wesentlich ist, so muß sie sich durch a priori erkennbare Prinzipien geltend machen.“ Der Verzicht auf diese Voraussetzung ergibt die Lösung: „Die Vernunft macht sich in der physikalischen Forschung nicht durch Prinzipien a priori, sondern im Fortschritt der Begriffsbildung und der Erklärungsmethoden geltend.“

C. F. v. Weizsäcker.

Kratzer, Adolf: Wissenschaftstheoretische Betrachtungen zur Atomphysik. Abh. Fries'sche Schule, N. s. 6, 291—308 (1937).

Nach Einstein, Rosen und Podolsky (dies. Zbl. 12, 42) folgt aus der Quantenmechanik für das Ergebnis einer und derselben Messung an einem physikalischen System eine verschiedene Wahrscheinlichkeitsvoraussage, je nachdem welche von zwei konjugierten Größen an einem mit dem ersten vorher physikalisch verbundenen, schon

vor der Messung aber aus der Wechselwirkung gelösten System gemessen wird. Darin liegt, wie Verf. hervorhebt, keine logische Paradoxie. Denn die Gewinnung einer neuen Kenntnis über das zweite System involviert physikalisch eine Änderung unserer Kenntnis über das erste. Daß diese Änderung, selbst bei gleichem Anfangszustand (im quantenmechanischen Sinne), je nach der Art der Messung am zweiten System verschieden ausfallen kann, ist nicht widerspruchsvoll, da die einander ausschließenden Ergebnisse nicht am selben Gesamtsystem, sondern nur an verschiedenen Individuen einer Gesamtheit von Systemen im selben Zustand gewonnen werden können. Auf die wissenschaftstheoretische Bedeutung dieses neuen Zustandsbegriffs wird hingewiesen.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Hermann, Grete: Über die Grundlagen physikalischer Aussagen in den älteren und den modernen Theorien. Abh. Fries'sche Schule, N. s. 6, 309—398 (1937).

Kapitel I: „Wahrnehmung“ und „Erfahrung“ werden unterschieden. Erfahrung läßt sich in Urteilen formulieren, ist aber, obwohl dem Bewußtsein als Ganzes gegeben, logisch betrachtet bereits das Ergebnis einer Konstruktion, das der unmittelbaren sinnlichen Gewißheit entbehrt. Wahrnehmung widersetzt sich der adäquaten Formulierung in einem Urteil; sie hat unmittelbare Gewißheit, aber nur für die Zeit des Wahrnehmungsaktes selbst. Die dem menschlichen Geist eigentümliche Überzeugung, welche neben der Wahrnehmungsgewißheit in jedes Erfahrungsurteil einfließt, könnte summarisch so formuliert werden: Es besteht ein kausaler Zusammenhang zwischen Dingen in Raum und Zeit. Die Rolle der Vorstellungen von Zeit, Raum, Substanz und Kausalität beim Zustandekommen der Erfahrungen wird im einzelnen dargelegt. — Kapitel II: Die klassische Mechanik beschreibt den gesamten Naturzusammenhang mit Hilfe der genannten Vorstellungen. Sie ist insofern „anschaulich“ und entspricht in der einfachsten Weise den Forderungen Kants an die Naturerkenntnis. — Kapitel III: Die neueren Theorien (Elektrodynamik, Relativitätstheorie, Quantenmechanik) verzichten nur auf die eindeutige Abbildbarkeit des gesamten Naturzusammenhangs auf ein Begriffsschema, das im Rahmen dieser Vorstellungen bleibt. Dagegen wird auch in ihnen jede einzelne Erfahrung mit Hilfe dieser Vorstellungen gewonnen und ausgesprochen. (Denselben Sachverhalt drückt Bohrs Feststellung aus, daß man das Ergebnis eines Experiments nur unter Verwendung der Begriffe der klassischen Physik mitteilen kann. Ref.) Kants Ansatz wird also durch die neue Physik nicht widerlegt, sondern präzisiert.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Algebra und Zahlentheorie.

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

● **Waerden, B. L. van der:** Moderne Algebra. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin u. E. Noether. Tl. 1. 2. verb. Aufl. (Die Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung d. Anwendungsgeb. Hrsg. v. G. D. Birkhoff, W. Blaschke, R. Courant, M. Morse, F. K. Schmidt, E. Trefftz † u. B. L. van der Waerden. Bd. 33.) Berlin: Julius Springer 1937. IX, 272 S. RM. 15.60.

This revision of the old first volume of *Moderne Algebra* differs almost not at all from the original in Chapters I, VI, VII. In Chapter V a brief Section 8 on the calculus of subcomplexes of a group is added. In III a fundamental change in terminology is made. The word *schiefkörper* is used to replace *körper* and *körper* is used where the old text used *commutative körper*. Also Section 14 on linear sets of finite order over a ring and linear algebras, and Section 18 on Euclidean rings are two new sections. Chapter IV has Sections 71, 72 of the old Volume II on resultants added, as well as a section on partial fractions. Some of the other sections here and in Chapter V are revised and enlarged. The old Chapter VIII on ordered and well-ordered sets is omitted, and the new Chapter VIII differs from the old IX mainly in consequent revision. The additional Section 65 is on differentiation of algebraic functions, while Section 63 is the old Section 37 carried over from Chapter V where it is now omitted. Chapter IX is the old X revised and rearranged. Finally Chapter X is a new chapter giving an exposition of the theory of Bewertete Körper.

Albert (Chicago).

Kuntzmann: Opérations multiformes. Hypergroupes. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 1787—1788 (1937).

In einer Menge E sei eine mehrdeutige unvollständige Verknüpfung definiert. $\frac{a}{|b|}$ bezeichne die Menge der Elemente, für die $bx = a$, entsprechend $\frac{a}{|b|}$ die, für die $xb = a$. Es werden Sätze über diese Verknüpfungsart ausgesprochen, z. B. die Annahmen

$$\frac{a}{|c|} \supset \frac{a}{|bc|}, \quad \frac{a}{|c|} \supset \frac{a}{|b|}, \quad \frac{a}{|bc|} \supset \frac{a}{|c|}, \quad (ab)c \supset a(bc)$$

sind gleichwertig. Ein Spezialfall der betrachteten Systeme sind die Martyschen Hypergruppen. Ott-Heinrich Keller (Berlin).

Rabinow, David G.: Note on the definition of fields by independent postulates in terms of the inverse operations. Amer. J. Math. **59**, 385—392 (1937).

Die Körperaxiome werden etwas variiert und auf Addition und Division aufgebaut. Die Additionsaxiome sagen aus, daß der Körper eine additive Gruppe ist. Weiterhin wird gefordert: Vertauschbarkeit zweier aufeinanderfolgender Divisionen, Existenz und Unität der Einheit und daß die Umkehroperation der Division (also die Multiplikation) immer eindeutig ausführbar ist. Daraus folgt leicht, daß der Körper eine multiplikative abelsche Gruppe ist. Daß die additive Gruppe gleichfalls kommutativ ist, wird geradeso bewiesen wie der allgemeinere Satz von Olga Taussky [Bull. Calcutta Math. Soc. **28**, 245, 246 (1936); dies. Zbl. **16**, 50]. Friedrich Levi.

Baer, Reinhold: Equivalence of algebraic extensions. Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 432—437 (1937).

Der Körper F heiße vollständig algebraisch über dem Teilkörper S , wenn 1. F/S algebraisch ist und 2. ein Isomorphismus f von S auf den Körper $S' \leq G'$, der S -Polynome mit Wurzeln in F stets auf S' -Polynome mit Wurzeln in G' abbildet, von einem Isomorphismus von F auf einen Teilkörper von G' induziert wird; bei jeder möglichen Wahl von S' und G' . Einfache und normale algebraische Erweiterungen sind stets vollständig algebraisch. Eine hinreichende Bedingung für vollständig algebraisch ist: Zu jedem Körperpaar U, V mit $S \leq U \leq V \leq F$, V/U endlich, gibt es einen Körper W zwischen V und F , der über U endlich und vollständig algebraisch ist. Über S separable F sind daher vollständig algebraisch über S . Sei F vollständig algebraisch über S , F' algebraisch über S' und sei S durch ξ isomorph auf S' abgebildet. Dann und nur dann kann ξ zu einem Isomorphismus von F auf F' erweitert werden, wenn jedes S -Polynom $g(x)$ die gleiche Nullstellenzahl in F wie $g(x)\xi$ in F' hat. Falls F/S separabel ist, so genügt es, daß $g(x)\xi$ genau dann eine Nullstelle in F' hat, wenn $g(x)$ eine Nullstelle in F hat. F_1, F_2 seien zwei Körper von Primzahlcharakteristik, die beide algebraisch über dem gemeinsamen Teilkörper K sind. $R(K < F_i)$ bezeichne den Körper der Wurzelemente von F_i beziehentlich K . Wird ferner vorausgesetzt, daß $F_1/R(K < F_i)$ separabel ist, so sind F_1 und F_2 genau dann äquivalent über K , wenn genau die gleichen Polynome von K in F_1 und F_2 Nullstellen haben. Deuring (Jena).

Krull, Wolfgang: Dimensionstheorie in Stellenringen. S.-B. physik.-med. Soz. Erlangen **67/68**, 319—323 (1937).

Als Stellenring wird ein kommutativer Ring \mathfrak{R} mit Einheitselement bezeichnet, in dem die Maximalbedingung gilt und in dem die Menge der Nichteinheiten das einzige maximale Primideal \mathfrak{m} des Ringes bildet. Als Dimension eines Primideals \mathfrak{p} wird die um 1 verminderte größte Länge der Primoberidealketten $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots$ erklärt. Die Dimension eines beliebigen Ideals ist die größte Dimension eines Primoberideals. Die Dimension wird nach dem Vorbild von E. Lasker [Math. Ann. **60**, 20—116 (1905)] auf die Dimension des im Polynomring $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_n]$ liegenden „Leitideals“ zurückgeführt. Weitergehende Sätze speziell für p -adische Ringe.

G. Köthe (Münster).

Krull, Wolfgang: Galoissche Theorie der ganz abgeschlossenen Stellenringe. S.-B. physik.-med. Soz. Erlangen 67/68, 324—328 (1937).

\mathfrak{R} sei ein ganz abgeschlossener Stellenring ohne Nullteiler (vgl. vorst. Ref.), $\tilde{\mathfrak{R}}$ sei ein endlicher normaler separabler Erweiterungskörper des Quotientenkörpers \mathfrak{K} von \mathfrak{R} , $\tilde{\mathfrak{R}}$ der Ring aller von \mathfrak{R} ganzabhängiger Elemente aus $\tilde{\mathfrak{K}}$. Die maximalen Primideale $\tilde{\mathfrak{m}}$ von $\tilde{\mathfrak{R}}$ sind untereinander konjugiert und haben mit \mathfrak{R} das maximale Primideal \mathfrak{m} von \mathfrak{R} als Durchschnitt. Zu $\tilde{\mathfrak{m}}$ werden die Zerlegungs-, die Trägheits- und die Verzweigungsgruppe Γ_z , Γ_t und Γ_v eingeführt. Es wird voller Aufschluß über Zerlegungs- und Trägheitskörper erhalten, ferner erweist sich Γ_v/Γ_v isomorph einer bestimmten linearen homogenen Substitutionsgruppe, Γ_v ist auflösbar von Primzahlpotenzgrad.
G. Köthe (Münster i. W.).

Brauer, R., and C. Nesbith: On the regular representations of algebras. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 236—240 (1937).

The paper is an abstract without proofs of results on the representations of algebras A over an algebraically closed field F . The relations between the form and number of the inequivalent indecomposable components in the two regular representations of A , and that of the inequivalent irreducible representations are given. A number of results are also stated about the multiplicity of the various components in the regular representation. The case where the two regular representations are equivalent is considered and the concept of symmetric algebras defined. It is then stated that A is symmetric if and only if its first regular representation can be carried into the second by means of a symmetric transforming matrix. The resulting conditions on the indecomposable components are then given.
Albert (Chicago).

Shoda, Kenjiro: Über die Maximalordnungen einer normalen einfachen Algebra mit einem unverzweigten Galoisschen Zerfällungskörper. Jap. J. Math. 13, 367—373 (1937).

Für zerfallende verschränkte Produkte hat E. Noether (Actualités scientifiques et industrielles 1934; dies. Zbl. 9, 195) explizite Darstellungen aller Maximalordnungen angegeben. Verf. beschäftigt sich mit der entsprechenden Aufgabe für beliebige verschränkte Produkte. Sei \mathfrak{S} eine normale einfache Algebra über einem algebraischen Zahlkörper k endlichen Grades, K ein in \mathfrak{S} enthaltener galoisscher maximaler Teilkörper und $\mathfrak{S} = \sum_s u_s K$ eine zugehörige verschränkte Produktdarstellung mit dem Faktorensystem $a_{s,T}$. Sind die m_s Moduln in K , so bildet ein Modul $\mathfrak{M} = \sum_s u_s m_s$ dann und nur dann eine Ordnung in \mathfrak{S} , wenn die m_s sogar Ideale in K und die $a_{s,T} = a_{s,T} \frac{m_s^x m_T}{m_{sT}}$ ganz sind. Eine möglichst umfassende Ordnung dieser Art heißt eine verschränkte Ordnung. Die Hauptergebnisse sind dann: Damit das verschränkte Produkt $\mathfrak{S} = (a_{s,T}, K/k)$ eine verschränkte Maximalordnung besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß K/k unverzweigt ist. In diesem Falle ist genau jede die Hauptordnung \mathfrak{o}_K von K enthaltende Maximalordnung von \mathfrak{S} eine verschränkte Ordnung, und die Diskriminante von \mathfrak{S} ist $\prod_{s,T} a_{s,T}^2$. Ferner ist jedes Ideal \mathfrak{a} von \mathfrak{S} mit \mathfrak{o}_K enthaltender Rechts- und Linksordnung direkte Modulsumme $\sum_s u_s a_s$, wo die a_s Ideale von K sind.
Hasse (Göttingen).

Hull, Ralph: Note on the ideals of cyclic algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 384—387 (1937).

Aus der bekannten Idealtheorie in halbeinfachen Algebren wird folgender Satz gefolgt: Sei D eine normale Divisionsalgebra vom Primzahlgrad n (≥ 2) über dem rationalen Zahlkörper und Δ ihre Diskriminante. Für jede Maximalordnung \mathfrak{o} von D ist die Anzahl der ganzen \mathfrak{o} -Rechtsideale gegebener Norm m gleich der Anzahl der Klassen rechtsassoziierter ganzzahliger Matrizen n -ten Grades, deren Determinante der zu Δ prime Bestandteil m_0 von m ist.
Hasse (Göttingen).

Schilling, Otto F. G.: The structure of certain rational infinite algebras. Duke math. J. 3, 303—310 (1937).

Sei k ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades. Verf. betrachtet Algebren A unendlichen Ranges über k als Zentrum, und zwar nur total-normale, d. h. solche, die sich durch eine aufsteigende Kette normaler einfacher Algebren A_i über k darstellen lassen. Die Strukturuntersuchung solcher Algebren reduziert sich nach Köthe [Math. Ann. 105, 15—39 (1931); dies. Zbl. 2, 118] leicht auf den Fall, daß A ein unendliches direktes Produkt normaler einfacher Algebren von Primzahlpotenzgraden mit lauter verschiedenen Primzahlen ist. Verf. beschreibt die Struktur solcher A durch zyklische Darstellung der direkten Faktoren und entwickelt auch eine Theorie der Maximalordnungen und der Primideale. Hasse (Göttingen).

Nakayama, Tadas: Maximalordnungen und Erweiterung des Koeffizientenkörpers eines hyperkomplexen Systems. Jap. J. Math. 13, 333—359 (1937).

\mathfrak{A} sei eine halbeinfache Algebra über einem endlichen algebraischen Zahlkörper K , \mathfrak{o} eine Maximalordnung von \mathfrak{A} . Es werden die \mathfrak{o} umfassenden Maximalordnungen der Algebra \mathfrak{A}_L untersucht, die aus \mathfrak{A} durch Erweiterung des Grundkörpers K zu L entsteht. Natürlich kann man sich darauf beschränken, daß \mathfrak{A}/K einfach und normal ist. Die Untersuchung wird vornehmlich für p -adische Zahlkörper K geführt. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}$ eine Divisionsalgebra vom Grade m , $(L:K) = n$, f der Restklassengrad von L/K , $e = n/f$ die Verzweigungsordnung, so können die $\mathfrak{o}_{\mathfrak{D}}$ umfassenden Maximalordnungen von \mathfrak{D}_L durch $f_0 = (f, m)$ ganze Zahlen $c_1 = 0 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots \leq c_f \leq \frac{ef_0}{(ef, m)}$ beschrieben werden als Gesamtheit aller Matrizen

$$\gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_0 \Gamma_1 & \dots & \Gamma_{\frac{m}{f_0}-1} \\ p_K \Gamma_{\frac{m}{f_0}-1}^r & \Gamma_0^r & \dots & \Gamma_{\frac{m}{f_0}-2}^r \\ \vdots & & & \\ p_K \Gamma_1^r & \dots & \dots & \end{pmatrix}; \quad \Gamma_i = (\gamma_{ik}^{(i)}), \quad i, k = 1, \dots, f_0;$$

mit

$$\gamma_{ik}^{(i)} \in \mathfrak{o}_{WL} p_L^{c_{ik}^{(i)}}, \quad c_{ik}^{(i)} = - \left[\frac{ef_0}{m} t + (c_k - c_i) \frac{e(f, m)}{m} \right];$$

dabei ist W der Trägheitskörper von \mathfrak{D}/K , p_C ist ein Primelement des Körpers C und \mathfrak{o}_C seine Maximalordnung, $[a]$ ist die größte ganze Zahl $\leq a$. Die Ausdehnung

auf einfaches $\mathfrak{A} = \sum_{i,k=1}^r \mathfrak{D} \varepsilon_{ik}$ (ε_{ik} Matrizeneinheiten) ist leicht, weil eine Maximalordnung \mathfrak{o}

von \mathfrak{A} stets in der Form $\sum \mathfrak{o}_{\mathfrak{D}} \varepsilon_{ik}$ und eine \mathfrak{o} umfassende Maximalordnung von \mathfrak{A}_L in der Form $\sum \mathfrak{o}_{\mathfrak{D}_L} \varepsilon_{ik}$ mit den gleichen ε_{ik} und $\mathfrak{o}_{\mathfrak{D}_L} \supseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{D}}$ geschrieben werden kann. Ein Ideal von \mathfrak{A}_L heißt ausgezeichnet, wenn seine beiden Ordnungen \mathfrak{o} umfassen. Ein ganzes ausgezeichnetes Ideal ohne echten ausgezeichneten Teiler heißt maximal.

Die Norm eines maximalen ausgezeichneten Ideals ist die $r^2 \frac{m(e, f, m)}{f_0}$ -te Potenz von p_L .

Die \mathfrak{o} umfassende Maximalordnung \mathfrak{D} von \mathfrak{A}_L heißt von erster Art, wenn sie nur ein ausgezeichnetes maximales Rechtsideal enthält. Über die ausgezeichneten Ideale wird ein gewisser formelmäßiger Überblick gegeben. Die Zerlegung des Primideals \mathfrak{P} einer Maximalordnung $\mathfrak{D} \supseteq \mathfrak{o}$ in ein eigentliches Produkt maximaler ausgezeichneten Ideale ist genau dann eindeutig, wenn \mathfrak{D} von erster Art ist. Die Gruppe \mathfrak{U} der (inneren) Automorphismen von \mathfrak{A}_L , die \mathfrak{o} fest lassen, ist die Faktorgruppe der Nichtnullteiler α von \mathfrak{A} mit zweiseitigem $\alpha \mathfrak{o}$ nach den Elementen von K . Die Faktorgruppe $\mathfrak{U}/\mathfrak{B}$ nach der Untergruppe der Automorphismen, die die Maximalordnungen $\mathfrak{D} \supseteq \mathfrak{o}$ von \mathfrak{A}_L einzeln fest lassen, ist zyklisch von der Ordnung f_0 ; α liefert genau dann ein \mathfrak{B} -Element,

wenn α_0 eine Potenz von p_0^f ist. Es werden schließlich noch für die Teilkörper L' von L die Beziehungen von $\mathfrak{A}_{L'}$ zu \mathfrak{A}_L untersucht. Z. B. gilt folgender Satz: T sei der Trägheitskörper von L/K . Eine Maximalordnung $\mathfrak{D} \geq \mathfrak{o}$ von \mathfrak{A}_L enthält genau dann eine Maximalordnung von \mathfrak{A}_T , wenn \mathfrak{D} von erster Art ist. *Deuring* (Jena).

Zahl- und Funktionenkörper:

Bilharz, Herbert: Primdivisoren mit vorgegebener Primitivwurzel. *Math. Ann.* 114, 476—492 (1937).

$a \neq 0$ sei eine Zahl eines Zahlkörpers k , sie sei keine Einheitswurzel. Für welche Primideale \mathfrak{p} von k ist a Primitivwurzel (ist a PW (\mathfrak{p}))? Genauer: Hat die Menge \mathfrak{M}_a dieser \mathfrak{p} eine Dirichletdichte $w(\mathfrak{M}_a)$? (Problem von Artin.) Nach Artin zeigt man leicht: Genau dann ist a PW (\mathfrak{p}), wenn \mathfrak{p} für keine Primzahl q in dem galoisschen Körper $K_q = k(\sqrt[q]{1}, \sqrt[q]{a})$ voll zerlegt ist. Die Dichte der in K_q nicht voll zerlegten \mathfrak{p} ist $1 - 1/(K_q:k)$, so daß $w(\mathfrak{M}_a) = \prod_q (1 - 1/(K_q:k))$ zu vermuten ist. Es müßte nur noch gerechtfertigt werden, daß der Grenzübergang $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{v=1}^n (1 - 1/(K_{q_v}:k))$ mit dem

in der Definition der Dirichletdichte steckenden Grenzübergang $s \rightarrow 1 + 0$ vertauscht werden darf. Man zeigt dann weiter, daß $w(\mathfrak{M}_a)$ positiv ist, wenn für kein q , für das k die q -ten Einheitswurzeln enthält, a eine q -te Potenz in k ist (in diesem Ausnahmefall gibt es überhaupt keine PW (\mathfrak{p}) zu a , wie man leicht sieht). — In der vorliegenden Arbeit wird die Artinsche Frage für den analogen Fall behandelt, daß k ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten über einem Galoisfeld Ω mit p Elementen ist. Die formalen Überlegungen werden etwas verwickelter, weil die Körper K_q nicht über k unabhängig sind wie im Fall der Zahlen. Für eine Primdivisorenmenge \mathfrak{M} aus k

setze man $w(s, \mathfrak{M}) = \frac{\sum_{m \geq 1, \mathfrak{p} \in \mathfrak{M}} (m N \mathfrak{p}^{m^s})^{-1}}{\sum_{m \geq 1, \text{alle } \mathfrak{p}} (m N \mathfrak{p}^{m^s})^{-1}}$, so daß $w(\mathfrak{M}) = \lim_{s \rightarrow 1+0} w(s, \mathfrak{M})$ die Dirichlet-

dichte von \mathfrak{M} ist (falls sie existiert). Bezeichnet (K_q) die Menge der in K_q voll zerfallenden Primdivisoren von k , so stimmt der Durchschnitt $\mathfrak{M}^* = \bigcap_q ((k) - (K_q))$ bis auf endlich viele Primdivisoren mit \mathfrak{M}_a überein, so daß \mathfrak{M}^* an Stelle von \mathfrak{M}_a untersucht werden darf. Durch kombinatorische Überlegungen kommt man, $\mathfrak{M}_n = \bigcap_{v \leq n} ((k) - (K_{q_v}))$ gesetzt, zu $\lim_{n \rightarrow \infty} w(s, \mathfrak{M}_n) \geq w(s, \mathfrak{M}^*)$, $0 \leq w(s, \mathfrak{M}_n) - w(s, \mathfrak{M}^*) \leq \sum_{v > n} w(s, (K_{q_v}))$ und

$w(\mathfrak{M}_n) = \sum_{m | q_1 \dots q_n} \frac{\mu(m)}{(K_m:k)}$. Es ist nun $w(s, (K_q)) \leq \frac{1}{(K_q:k)} \frac{\log \zeta(s, K_q)}{\log \zeta(s, k)}$. Unter Annahme der

Riemannschen Vermutung für die Zetafunktionen $\zeta(s, K_q)$ der K_q wird nun gezeigt, daß die Reihe

$$\sum_q \frac{1}{(K_q:k)} \frac{\log \zeta(s, K_q)}{\log \zeta(s, k)} \quad (1)$$

in einem festen Intervall $1 < s \leq s_0$ gleichmäßig konvergiert. Da diese Reihe die Reihe $\sum_q w(s, (K_q))$ majorisiert, so schließt man zunächst $\lim_{n \rightarrow \infty} w(s, \mathfrak{M}_n) = w(s, \mathfrak{M}^*)$ und weiter

$$\begin{aligned} w(\mathfrak{M}^*) &= \lim_{s \rightarrow 1+0} w(s, \mathfrak{M}^*) = \lim_{s \rightarrow 1+0} \lim_{n \rightarrow \infty} w(s, \mathfrak{M}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow 1+0} w(s, \mathfrak{M}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} w(\mathfrak{M}_n) \\ &= \lim_{m | q_1 \dots q_n} \sum \frac{\mu(m)}{(K_m:k)}. \end{aligned}$$

Es ist $(K_q:k) = qf(q)$, wenn $f(q)$ die Ordnung von p modulo q bezeichnet, und der Konstantenkörper Ω_q von K_q hat $p^{f(q)}$ Elemente, von endlich vielen q abgesehen. Diese Ausnahme- q lasse man aus der Reihe (1) fort. R_q sei der Körper der rationalen

Fkt. einer Unbestimmten über Ω_q , also $\zeta(s, K_q) = \zeta(s, R_q) \cdot \prod_{i=1}^{2g(K_q)} \left(1 - \frac{\omega_i}{p^{f(q)s}}\right)$, wobei

wegen der Riemannschen Vermutung $\omega_i = p^{\frac{1}{2}f(q)}$ zu setzen ist. Der Beweis von (1) wird unter schwächerer Annahme $\omega_i = p^{f(q)(1-\vartheta)}$ mit von q unabhängigem $\vartheta > 0$ geführt. Die Reihe (1) zerfällt in zwei Teile

$$\sum_q \frac{1}{qf(q)} \frac{\log \zeta(s, R_q)}{\log \zeta(s, k)} \quad \text{und} \quad \sum_q \frac{1}{qf(q)} \frac{\log \prod_{i=1}^{2g(K_q)} \left(1 - \frac{\omega_i}{p^{f(q)s}}\right)}{\log \zeta(s, k)}.$$

Da nach einem Satze von Romanoff (Romanoff, dies. Zbl. 9, 8; Erdős-Turán, dies. Zbl. 12, 12) $\sum_q 1/qf(q)$ konvergiert, so braucht für die erste Reihe nur die gleichmäßige Beschränktheit der Logarithmenquotienten gezeigt zu werden, was mittels der Eulerschen Produktzerlegung leicht geschehen kann. Um die zweite Reihe zu behandeln, schätzt man zuerst das Geschlecht $g(K_q)$ von K_q durch eine von q unabhängige positive Zahl r ab: $2g(K_q) < qr$, zeigt mittels des erwähnten Romanoffschen Satzes die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{q|p} \frac{1}{p^{r(q)\vartheta} f(q)}$$

und schließt dann aus der Abschätzung

$$\left| \log \prod_{i=1}^{2g(K_q)} \left(1 - \frac{\omega_i}{p^{f(q)s}}\right) \right| < r \frac{p^\vartheta}{p^\vartheta - 1} \frac{q}{p^{f(q)\vartheta}}$$

auf die gleichmäßige Konvergenz der zweiten Teilreihe. — Nach Davenport und Heilbronn erhält man für die Dichte $w(\mathfrak{M}_a)$ die untere Abschätzung

$$w(\mathfrak{M}_a) \geq \prod_{a \neq 1} \left(1 - \frac{1}{qf(q)}\right) \cdot \prod_{a=1} \left(1 - \frac{1}{f(q)}\right),$$

so daß $w(\mathfrak{M}_a)$ positiv ist, wenn nicht für ein q mit $f(q)=1$ a eine q -te Potenz in k wird, in welchem Falle es überhaupt keine p mit a PW p geben kann. *Deuring* (Jena).

Bergström, Harald: Über die Methode von Woronoj zur Berechnung einer Basis eines kubischen Zahlkörpers. Ark. Mat. Astron. Fys. 25 B, Nr 26, 1—8 (1937).

Let F be the cubic field defined by a root of $x^3 + bx + c = 0$. We may assume that b, c are rational integers such that there is no prime p such that p^2 divides b and p^3 divides c . Woronoj gave a method of determining a basis of the integral numbers of F . This method requires the tentative determination of two rational integers, f and g . In this paper, Woronoj's result is obtained and then f and g are determined explicitly in terms of b and c . Similar results were obtained by Albert [Ann. of Math. (2) 31, 550—566 (1930)]. *Latimer* (Lexington, Ky.).

Moriya, Mikao: Verschiebungs- und Abgrenzungssatz in der Theorie der Klassenkörper über einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten mit endlichem Konstantenkörper. Proc. Imp. Acad. Jap. 12, 318—321 (1936).

Verf. hat in der ihm zugänglichen Literatur keine Beweise für diese beiden Sätze gefunden. Da er sie für eine weitere Untersuchung braucht, führt er die Beweise noch geläufigem Vorbild aus. *Hasse* (Göttingen).

Moriya, Mikao: Klassenkörpertheorie im Großen für unendliche algebraische Zahlkörper. Proc. Imp. Acad. Jap. 12, 322—324 (1936).

Nachdem Verf. kürzlich die Klassenkörpertheorie im Kleinen über einem algebraischen Zahlkörper k unendlichen Grades entwickelt hatte (s. dies. Zbl. 16, 153), gibt er hier eine vorläufige Mitteilung über die zugehörige Klassenkörpertheorie im Großen. Als Moduln \mathfrak{m} treten dabei die Produkte aus einem ganzen Ideal und beliebig vielen unendlichen Primstellen von k auf. Die umkehrbaren Ideale von k bilden eine multiplikative abelsche Gruppe, welche die Gruppe der Hauptideale von k ent-

hält. Eine nur aus zu m primen Idealen bestehende Untergruppe, die alle Hauptideale (α) von k mit $\alpha \equiv 1 \pmod{m}$ enthält, heißt eine mod. m erklärte Idealgruppe in k . In geläufiger Weise wird dann der Begriff der einer endlichen algebraischen Erweiterung K/k mod. m zugeordneten Idealgruppe erklärt. Ihr Index ist stets ein Teiler des Grades $[K:k]$. Alle derartigen Gruppen, für die dieser Index maximal ist, sind in bekanntem Sinne einander gleich: K/k schlechthin zugeordnete Idealgruppe, Index h . K/k heißt Klassenkörper, wenn $[K:k] = h$ ist. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn K/k abelsch ist und $[K:k]$ prim zum unendlichen Bestandteil des Grades von k (Steinitzsche G -Zahl) ist. Damit ist der Umkehrsatz der gewöhnlichen Klassenkörpertheorie verallgemeinert. Man kann dann auch den Isomorphiesatz, Anordnungssatz, Eindeutigkeitssatz und Verschiebungssatz beweisen. Für den Existenzsatz muß man sich notwendig auf eine spezielle Klasse von Idealgruppen H beschränken, die Verf. K -Gruppen nennt: Es muß ein Teilkörper k_* endlichen Grades und ein Erklärungsmodul m von H derart vorhanden sein, daß für die mod. m erklärte Idealgruppe H der Durchschnitt $H \cap k_0$ mit einem beliebigen k_* enthaltenden Teilkörper k_0 endlichen Grades gleich ist zu der Idealgruppe in k_0 , deren Normen nach k_* in $H \cap k_*$ liegen. Genau zu diesen Idealgruppen H gibt es Klassenkörper K/k .

Hasse (Göttingen).

Moriya, Mikao, und O. F. G. Schilling: Zur Klassenkörpertheorie über unendlichen perfekten Körpern. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 5, 189—205 (1937).

Moriya [J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 5, 9—66 (1936); dies. Zbl. 16, 153] hat eine Klassenkörpertheorie über den p -adischen Körpern algebraischer Zahlkörper unendlichen Grades gegeben. Er benutzt dabei die von Chevalley in seiner Thèse [J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 2, 366—476 (1933); dies. Zbl. 8, 53] entwickelten abzählenden Methoden, die Exponentialfunktion und Logarithmus im zugehörigen perfekten Körper verwenden. Verff. geben in dieser Arbeit eine neue Begründung der Hauptsätze dieser verallgemeinerten Klassenkörpertheorie, nach der in neuerer Zeit in der gewöhnlichen Klassenkörpertheorie zur Entwicklung gekommenen hyperkomplexen Methode.

Hasse (Göttingen).

Suetuna, Zyoiti: Abhängigkeit der L -Funktionen in gewissen algebraischen Zahlkörpern. II. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I 3, 223—252 (1937).

Verf. hat in verschiedenen Arbeiten (s. dies. Zbl. 15, 199 u. 16, 153) die Abhängigkeiten der L -Funktionen für einzelne Spezialfälle bestimmt. In vorliegender Arbeit tut er das Gleiche bei folgenden Annahmen: k ist über R vom 5ten Grade, die zu k' gehörige Gruppe ist die Ikosaedergruppe. $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}\tau_1 + \mathfrak{H}\tau_2 + \mathfrak{H}\tau_3 + \mathfrak{H}\tau_4$ mit $\mathfrak{H}'\tau_1 = (12)(34)$, $\mathfrak{H}'\tau_2 = (13)(25)$, $\mathfrak{H}'\tau_3 = (14)(25)$, $\mathfrak{H}'\tau_4 = (15)(34)$. $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}'$ ist die alternierende Gruppe von 4 Ziffern 2, 3, 4, 5; zwischen \mathfrak{H} und \mathfrak{H}' gibt es also genau einen echten Normalteiler \mathfrak{H}° von \mathfrak{H} . Es sei $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^\circ + \mathfrak{H}^\circ\varrho + \mathfrak{H}^\circ\varrho^2$ mit $\mathfrak{H}'\varrho = (3\ 4\ 5)$ und $\mathfrak{H}^\circ = \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}'\pi_1 + \mathfrak{H}'\pi_2 + \mathfrak{H}'\pi_3$ mit $\mathfrak{H}'\pi_1 = (23)(45)$, $\mathfrak{H}'\pi_2 = (24)(35)$, $\mathfrak{H}'\pi_3 = (25)(34)$. Es werden die Zerlegungen der einfachen Charaktere von \mathfrak{H} in die von \mathfrak{H}' und in die von Gruppen zwischen \mathfrak{H} und \mathfrak{H}' sowie die Zerlegung der einfachen Charaktere von \mathfrak{G} aufgestellt; damit gelingt wieder die Bestimmung aller Abhängigkeiten zwischen den L -Funktionen. Ist N_ψ für einen einfachen Charakter $\psi(\sigma)$ von \mathfrak{H}' die Gesamtheit der Elemente τ aus \mathfrak{G} mit $\psi(\sigma) = \psi(\tau\sigma\tau^{-1})$, dann lassen sich alle überhaupt bestehenden Abhängigkeiten der L -Funktionen reduzieren auf 7 Fälle; je nachdem nämlich N_ψ ist gleich \mathfrak{H} , $\mathfrak{H}_* = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}\pi_2$, \mathfrak{H}° , $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}'\varrho + \mathfrak{H}'\varrho^2$, $\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_1\tau_1$, \mathfrak{H} , \mathfrak{G} .

Grunwald (Kiel).

● **Beatty, S., and D. C. Murdoch: Fundamental exponents in the theory of algebraic numbers.** (Univ. of Toronto studies, math. ser. Nr. 3.) Toronto: Univ. of Toronto press 1937. 36 S.

Es handelt sich um eine Übertragung von Begriffsbildungen und Methoden aus der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen auf die Theorie der algebraischen Zahlen. Die Untersuchung schließt sich an eine Arbeit von J. C. Fields

[Proc. Internat. Math. Congr. Toronto 1, 245 (1924)] an, dessen Betrachtungen vereinfacht und wesentlich weiter ausgebaut werden. Ein Zusammenhang besteht mit Resultaten von O. Ore, vgl. etwa Math. Ann. **96**, 313 (1927). — Zunächst wird die folgende Verschärfung eines Henselschen Resultats bewiesen: Ist $g(x) = x^m + g_1 x^{m-1} + \dots + g_m$ ein Polynom mit p -adischen Koeffizienten, das entweder irreduzibel oder allgemeiner eine Potenz eines irreduziblen Polynoms ist, und hat g_i die p -adische Ordnung β_i , so ist $\frac{\beta_i}{i} \geq \frac{\beta_m}{m}$. Der Quotient $\frac{\beta_m}{m}$ wird dann als die Radix von $g(x)$ bezeichnet. Es sei jetzt $F(x)$ ein Polynom, das im p -adischen Bereich in lauter verschiedene irreduzible Faktoren $f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)$ zerfällt. $f(x)$ vom Grad n sei einer dieser Faktoren. Für eine rationale Funktion ϱ mit zu f teilerfremdem Nenner bezeichne $(\varrho)_f$ das zu $\varrho \bmod f$ kongruente Polynom von höchstens $(n-1)$ -tem Grad. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ die Wurzeln von f , so wird als p -adische Ordnung von ϱ der Quotient der p -adischen Ordnung der Norm $\varrho(\alpha_1) \dots \varrho(\alpha_n)$ durch n bezeichnet. Insbesondere sei μ die Ordnung von $F'(x)$ und ω die von $f'(x)$. Unter den möglichen positiven Ordnungen von rationalen Funktionen gibt es eine kleinste $q = \frac{e}{n}$, wo e ein Teiler von n ist. Jede andere Ordnung τ ist ein Vielfaches von q . Eine rationale Funktion ϱ heißt auf diese Ordnung τ aufgebaut, wenn sie mindestens die Ordnung τ besitzt. Zu jedem τ gehört ein Polynom $g_\tau = \sum c_{ij} x^i p^j$ vom Grad $n-1$ in x . Alle auf τ aufgebauten $(\varrho)_f$ werden erhalten, wenn den unbestimmten Koeffizienten c_{ij} Werte $0, 1, \dots, p-1$ erteilt werden. Diese haben eine endliche Anzahl von Kongruenzbedingungen n -ten Grades zu erfüllen, von denen jede nur endlich viele c_{ij} enthält. Ersetzt man τ durch $\tau + q$, so hat man e neue Bedingungen hinzuzufügen. — Weiter werden Polynome der Form $\frac{F}{f} \left(\frac{\varrho f}{F} \right)_f$ betrachtet, insbesondere solche, für die die p -adische Ordnung des Koeffizienten von x^{N-1} verschwindet. Es sei $\mu - m$ die größte Ordnung, die die Funktion ϱ dabei haben kann. Dann gilt $0 \leq m \leq \omega - (n-1)\lambda$, wo λ die Radix von f ist. Unter einer p -adischen Ordnungsbasis (τ) wird ein System von Zahlen τ_1, \dots, τ_r verstanden, derart, daß τ_i Ordnungszahl für $f_i(x)$ ist. Eine rationale Funktion $(\varrho)_F$ ist auf dieser Ordnungsbasis aufgebaut, wenn die Ordnung von ϱ für jedes f_i mindestens τ_i ist. Alle auf (τ) aufgebauten Funktionen können ähnlich wie im Fall eines Zyklus f aus einer allgemeinen Funktion $G_{(\tau)}$ durch Spezialisierung erhalten werden. Dabei kann $G_{(\tau)}$ aus den g_τ für die einzelnen $f_i(x)$ und geeignete Ordnungen ν erhalten werden. Etwas allgemeiner kann ein allgemeines Polynom $G_{(\tau)}^{(M)}$ vom Grad M betrachtet werden, das alle auf (τ) aufgebauten ϱ vom Grad M liefert, $0 \leq M \leq N-1$. Es sei $-\alpha_M$ die p -adische Ordnung des Koeffizienten von x^M in $G_{(\tau)}^{(M)}$. Die Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$ werden als die Fundamentalexponenten bezeichnet; es ist $\alpha_{N-1} \geq \alpha_{N-2} \geq \dots \geq \alpha_0$. Kein Koeffizient von $G_{(\tau)}^{(M)}$ hat kleinere Ordnung als $-\alpha_M$. Zwei Ordnungsbasen (τ) und $(\bar{\tau})$ sind komplementär, wenn die Summe der entsprechenden Ordnungszahlen die aus den Größen $\mu - m - 1 + q$ bestehende adjungierte Basis ergibt. Für die zugehörigen Fundamentalexponenten gilt $\alpha_{N-M-1} + \bar{\alpha}_M = 0$; bei Fields findet sich nur die durch Summierung über M entstehende Relation. — Eine Ordnungsbasis $((\tau))$ für alle p liegt vor, wenn für jedes einzelne p ein (τ) derart gegeben ist, daß nur endlich viele der Zahlen τ von 0 verschieden sind. Eine Funktionsbasis besteht aus N linear unabhängigen Funktionen Φ_i der Form $(\varrho)_F$. Eine Funktion ist auf dieser Basis aufgebaut, wenn sie eine ganzzahlige lineare Verbindung der Φ_i ist. Zu jeder Ordnungsbasis $((\tau))$ gehört eine assoziierte Funktionenbasis derart, daß auf beiden Basen die gleichen Funktionen aufgebaut sind.

R. Brauer (Toronto).

Deuring, Max: Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper. I. J. reine angew. Math. **177**, 161—191 (1937).

In einer Reihe von Arbeiten über abstrakte elliptische Funktionenkörper (s. dies. Zbl. **11**, 197; **13**, 197; **14**, 149, 249) hat Ref. gezeigt, daß die algebraischen Eigenschaften eines algebraischen Funktionenkörpers vom Geschlecht 1, die sich aus seiner Darstellung als Körper

von doppeltperiodischen Funktionen ergeben, nicht auf den klassischen Fall des komplexen Zahlkörpers als Konstantenkörper beschränkt sind, sondern auch bei beliebigem algebraisch-abgeschlossenem Konstantenkörper zu finden sind. Verf. findet die Verallgemeinerung der Grundlagen dieser Theorie auf höheres Geschlecht g in einer rein algebraischen Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper. Für den klassischen Fall lag eine solche Theorie bereits vor (s. etwa F. Severi, *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, parte I, Cap. 6. Bologna 1927). Verf. entwickelt die Hauptsätze dieser Theorie für beliebigen algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper k , und zwar mit den Mitteln der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper. — Eine Korrespondenz eines algebraischen Funktionenkörpers K/k zu einem algebraischen Funktionenkörper K/k wird vom Verf. folgendermaßen definiert: Ist \mathfrak{P} ein Primdivisor der Konstantenerweiterung KK/K von K/k , der nicht konstant ist, d. h. nicht durch Erweiterung aus einem Primdivisor von K/k entspringt, so ist der Restklassenkörper mod. \mathfrak{P} eine endlich-algebraische Erweiterung K^* von K , und der homomorphe Übergang von KK zu den Restklassen mod. \mathfrak{P} liefert für den Teilkörper K einen Isomorphismus π auf einen Teilkörper $K_0^* = K^\pi$ von K^* , über dem K^* endlich-algebraisch ist. Für jeden Divisor α von K/k wird dann $\mathfrak{P}(\alpha) = N_{K^*/K_0^*}(\alpha)^{\pi-1}$ gesetzt; das ist ein Divisor von K/k . Ist \mathfrak{P} konstant, aus dem Primdivisor φ von K/k entspringend, so wird $\mathfrak{P}(\alpha) = \varphi^{\text{Grad } \alpha}$ gesetzt. So ist jedem Primdivisor \mathfrak{P} von KK/K in bestimmter Weise eine Funktion $\mathfrak{P}(\alpha)$ der Divisoren von K/k mit Divisoren von K/k als Werten zugeordnet. Für einen zusammengesetzten Divisor \mathfrak{D} von KK/K wird die Funktion $\mathfrak{D}(\alpha)$ durch entsprechende multiplikative Zusammensetzung erklärt. Diese Funktionen $\mathfrak{D}(\alpha)$ heißen die Korrespondenzen von K/k zu K/k . Über sie gelten folgende Sätze: Der Grad von $\mathfrak{D}(\alpha)$ ist das Produkt der Grade von \mathfrak{D} und α . $\mathfrak{D}(\alpha)$ ist multiplikativ in α , also ein Homomorphismus der Divisorengruppe von K/k in die von K/k . Aus $\alpha \sim 1$ folgt $\mathfrak{D}(\alpha) \sim 1$, d. h. $\mathfrak{D}(\alpha)$ liefert einen Homomorphismus der Klassengruppe von K/k in die von K/k und auch einen solchen der Klassengruppe nullten Grades von K/k in die von K/k . — $\mathfrak{D}(\alpha)$ ist auch multiplikativ in \mathfrak{D} . Es bezeichne \mathfrak{D}_0 einen konstanten Divisor von KK/K , d. h. einen solchen, dessen sämtliche Primfaktoren konstant sind, und α_0 einen Divisor nullten Grades von K/k ; dann gilt:

$$\left. \begin{array}{llll} \text{aus } \mathfrak{D} = 1 \text{ folgt } \mathfrak{D}(\alpha) = 1 \text{ für alle } \alpha & & & \\ \text{,, } \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 \text{ ,, } \mathfrak{D}(\alpha_0) = 1 \text{ ,, ,, } \alpha_0 & & & \\ \text{,, } \mathfrak{D} \sim 1 \text{ ,, } \mathfrak{D}(\alpha) \sim 1 \text{ ,, ,, } \alpha & & & \\ \text{,, } \mathfrak{D} \sim \mathfrak{D}_0 \text{ ,, } \mathfrak{D}(\alpha_0) \sim 1 \text{ ,, ,, } \alpha_0 & & & \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{und um-} \\ \text{gekehrt.} \end{array}$$

Für die Umkehrungen genügt es, einen einzigen (zu einem von \mathfrak{D} abhängigen Divisor primen) Primdivisor \mathfrak{p} bzw. Primdivisorquotienten $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_\infty}$ statt aller Divisoren α bzw. α_0 zugrunde zu legen.

Nach den letzten beiden Tatsachen bilden die durch die Korrespondenzen gelieferten Homomorphismen der Klassengruppe von K/k (die Transformatoren von K/k in K/k) einen zur Klassengruppe von KK/K isomorphen Modul, und die durch die Korrespondenzen gelieferten Homomorphismen der Klassengruppe nullten Grades von K/k (die Multiplikatoren von K/k in K/k) einen zu einer größeren Klassengruppe von KK/K isomorphen Modul; dabei ist die fragliche größere Klassengruppe durch Einbeziehung der konstanten Divisoren in die Hauptklasse gebildet. — Die Hintereinanderausführung einer Korrespondenz von K_1/k zu K_2/k und einer Korrespondenz von K_2/k zu K_3/k liefert stets wieder eine Korrespondenz von K_1/k zu K_3/k . Identifiziert man K mit K , so wird so der Homomorphismenmodul der Transformatoren bzw. Multiplikatoren von K/k in sich ein Homomorphismenring. Verf. führt aus, wie sich diese beiden Ringe im klassischen Fall durch komplexe Multiplikationen der Riemannschen Periodenmatrix Ω von K/k darstellen: Durchläuft M alle g -reihigen komplexzahligen Matrizen mit der Eigenschaft $M\Omega = \Omega G$, wo G eine $2g$ -reihige ganzzahlige Matrix ist, so ist der Multiplikatorenring isomorph zum Ring der Matrizen M selber, und der Transformatorenring zum Ring der erweiterten Matrizen $\begin{pmatrix} M & t \\ 0 & m \end{pmatrix}$, wo m eine ganze Zahl und t eine g -gliedrige Zeile aus komplexen Zahlen ist, und zwar auf Grund der Beziehungen:

$$\begin{aligned} u(\mathfrak{D}(\alpha)) &\equiv M \cdot u(\alpha) + t \cdot \text{Grad } \alpha & (\text{mod. } \Omega) \\ \text{Grad } \mathfrak{D}(\alpha) &= m \cdot \text{Grad } \alpha, \end{aligned}$$

wo u die g -gliedrige Spalte einer Basis der Integrale erster Gattung von K/k mit festen unteren Integrationsgrenzen in Abhängigkeit von den oberen Integrationsgrenzen bezeichnet. — Die Beweise für die oben angeführten Hauptsätze über Korrespondenzen, soweit sie nicht unmittelbar aus der Definition folgen, beruhen auf einem wichtigen Satz, den Verf. den Restidealsatz nennt. Dieser stellt die Identität des auf arithmetische Art definierten Korrespondenzbegriffs mit dem Korrespondenzbegriff der algebraischen Geometrie fest: Charakterisiert man die Divisoren durch die Moduln ihrer ganzen Multipla, so entsteht nach diesem Restidealsatz der Modul $\mathfrak{D}(\mathfrak{p})$ für fast alle Primdivisoren \mathfrak{p} durch Restbildung mod. \mathfrak{p} aus den für \mathfrak{p} ganzen Elementen des Moduls \mathfrak{D} , d. h. durch Einsetzung der konstanten Koordinaten des Punktes \mathfrak{p} für ein System K/k erzeugender Variabler. — Verf. geht schließlich auch noch auf Beziehungen

seiner Theorie zu der Hurwitz-Weylschen Korrespondenztheorie ein, in der die Korrespondenzen durch konforme Abbildung einer endlichblättrigen Überlagerungsfläche der Riemannschen Fläche von K/k auf eine endlichblättrige Überlagerungsfläche von K/k definiert werden.

Hasse (Göttingen).

Zahlentheorie:

Venkatasubbiah, G.: A method for constructing magic squares of the concentric type having an even number of cells in each row. *Math. Student* 4, 183—189 (1936).

Pillai, S. S.: A correction to the paper „On $A^x - B^y = C$ “. *J. Indian Math. Soc.* N. s. 2, 215 (1937).

Berichtigung des Beweises von Lemma 1 der Arbeit des Verf., über die in dies. Zbl. 14, 392 referiert wurde. Bessel-Hagen (Bonn).

Zorn, Max: p -adic analysis and elementary number theory. *Ann. of Math.*, II. s. 38, 451—464 (1937).

This paper is an application of the theory of p -adic numbers to Schur's generalization of Fermat's theorem (see this Zbl. 6, 248). The derivative of a sequence a_n with respect to a number p is defined as another sequence $\Delta a_n = (a_{n+1} - a_n)/p^{n+1}$; the second derivative $\Delta^2 a_n$ is the derivative of the derivative, and so on. Schur has proved, among other things, that in case p is a rational odd prime and if $a_n = ap^n$, where a is an integer prime to p , then all derivatives of a_n are sequences of integers in case Fermat's quotient $(a^{p-1} - 1)/p$ is divisible by p . Otherwise only the first $p - 1$ derivatives are sequences of integers while the p -th derived sequence has denominators p . In the present paper these results are shown to be true not only in the rational field but also in the p -adic field. In the course of the proof the author obtains certain congruences which generalize Schur's results. The following may be cited: Let $x - 1$ be divisible by the odd prime p and let $a_n = (x^p - 1)/p^{n+1}$, then, if $r < p$,

$$\Delta^r a_n \equiv \frac{(p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \dots (p - 1)}{(r + 1)!} \Delta^{n+1} a_n \pmod{p^n}.$$

D. H. Lehmer (Bethlehem).

Skolem, Th.: Über die Lösbarkeit gewisser linearer Gleichungen im Bereiche der ganzwertigen Polynome. *Norske Vid. Selsk., Forh.* 9, 134—137 (1937).

In this note the following theorem is proved: Let f_1, \dots, f_n, g denote polynomials in the m variables x_1, \dots, x_m which take on integral values whenever the x 's are integers. Then for every integer k there exist integer valued polynomials F_1, \dots, F_n, G such that $f_1 F_1 + \dots + f_n F_n + kG = g$ identically in x_1, \dots, x_m , if and only if for every set of integers x_1, \dots, x_m , the greatest common divisor of f_1, \dots, f_n, k divides g .

D. H. Lehmer (Bethlehem).

Stöhr, Alfred: Eine Basis h -ter Ordnung für die Menge aller natürlichen Zahlen. *Math. Z.* 42, 739—743 (1937).

Die Menge A von natürlichen Zahlen heißt eine Basis h -ter Ordnung (der natürlichen Zahlenreihe), falls jede natürliche Zahl als Summe von höchstens h Zahlen der Menge A dargestellt werden kann; $k(n)$ sei die Anzahl der Zahlen $\leq n$ von A . Rohrbach hat bewiesen (dies. Zbl. 15, 200), daß es für jedes h und jedes $\varepsilon > 0$ eine Basis h -ter Ordnung mit $k(n) = O\left(n^{\frac{1}{h} + \varepsilon}\right)$ gibt; Verf. zeigt nun, daß bereits eine solche mit $k(n) = O\left(n^{\frac{1}{h}}\right)$ vorhanden ist.

A. Khintchine (Moskau).

Davenport, H., and H. Heilbronn: Note on a result in the additive theory of numbers. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. 43, 142—151 (1937).

The set of positive integers n expressible as the sum of a prime and a k -th power, already proved by Romanoff to be of positive density (see this Zbl. 9, 8), is here shown to include almost all n . The proof is by the Hardy-Littlewood method. The authors encounter the same difficulty with the singular series as in their paper on two cubes and one square (this Zbl. 16, 246), and overcome it as before by a transition to a singular product. Application is made of the theorem (essentially due to Siegel)

that $L(s, \chi) \neq 0$ for $s > 1 - C(\epsilon)q^{-\epsilon}$, where χ is a real character mod q . — It is stated that the proof can be modified to show that, if k is odd, almost all n are expressible as $p + x^k$ or $2p + x^k$ with $p \equiv 1 \pmod{4}$, from which it follows that almost all n are expressible as $x^2 + y^2 + z^k$.

Ingham (Cambridge).

Gupta, Hansraj: On a conjecture of Chowla. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 5, 381—384 (1937).

I. Chowla hat conjectured that every positive integer is the sum of not more than 8 squares of primes, counting 1 as a prime. He verified this conjecture for all integers up to 30000, and this limit has been raised to 100000 by Gupta (see this Zbl. 11, 55 and 338). In this paper the limit is carried to 240000. This is done by verifying that every integer under 10000 which is congruent to 2 or 4 modulo 5 is the sum of at most three numbers of the form $(p^2 - 1)/24$ where p is a prime greater than 3. This property of numbers ≤ 10000 is conjectured to hold in general. The author makes another conjecture and states a number of results which are said to follow from these two conjectures. For example: The number of positive integers $< k$ which are the sums of no fewer than 8 squares of primes is less than $k/20$. A table is given of those integers A and $B \leq 2000$ which are of the forms $(p^2 - 1)/120$ and $(p^2 - 49)/120$ respectively, together with those numbers ≤ 2000 of the form $A + B$.

D. H. Lehmer (Bethlehem).

Gupta, Hansraj: A table of partitions. II. Proc. London Math. Soc., II. s. 42, 546—549 (1937).

This 3 page table gives the number of unrestricted partitions of n for $300 < n \leq 600$ and is an extension of a table by the same author to 300. The method employed in the construction of this extended table is described elsewhere (see this Zbl. 11, 200; 15, 247).

D. H. Lehmer (Bethlehem).

Watson, G. N.: Two tables of partitions. Proc. London Math. Soc., II. s. 42, 550—556 (1937).

The author uses $q(n)$ and $q_0(n)$ to denote respectively the number of partitions of the integer n into distinct integers and into distinct odd integers. These functions are tabulated (in 4 pages) up to $n = 400$. These tables were computed easily from previously published tables of $p(n)$, the number of unrestricted partitions of n , by means of the identities

$$\begin{aligned} \sum q_0(n) x^n &= \left\{ \sum x^{n(n+1)/2} \right\} \left\{ \sum p(n) x^{4n} \right\}, \\ \sum q(n) x^n &= \left\{ \sum x^{n(n+1)/2} \right\} \left\{ \sum p(n) x^{2n} \right\}. \end{aligned}$$

where n runs from 0 to ∞ and $q_0(0) = q(0) = p(0) = 1$. Aside from the facts that $q_0(n)$ and $p(n)$ are of the same parity and that $q(n)$ is odd if and only if n is a pentagonal number, there appear to be no congruence properties of $q_0(n)$ and $q(n)$ such as those enjoyed by $p(n)$.

D. H. Lehmer (Bethlehem).

Magnus, Wilhelm: Über die Anzahl der in einem Geschlecht enthaltenen Klassen von positiv-definiten quadratischen Formen. Math. Ann. 114, 465—475 (1937).

Beweis des folgenden Satzes: Es gibt nur endlich viele nichtäquivalente positiv-definite quadratische Formen

$$\mathfrak{S} = \sum_{i, k=1}^m s_{ik} x_i x_k$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten s_{ik} in $m \geq 3$ Veränderlichen, deren Geschlecht aus genau einer Klasse äquivalenter Formen besteht. Jede solche Form \mathfrak{S} ist primitiv, hat $m \leq 34$ und ihre Diskriminante ist höchstens gleich

$$\frac{1}{4} \left\{ 2^{2-2m} \pi^{-\frac{m(m+1)}{4}} \prod_{\mu=1}^m \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \right\}^2.$$

Für die speziellen Formen $\sum_{\mu=1}^m x_\mu^2$ wird gezeigt, daß ihr Geschlecht dann und nur dann

aus einer Formenklasse besteht, wenn $m \leq 8$ ist. — Der Beweis beruht auf einer Siegelschen Formel für das Maß $M(\mathfrak{S})$ des Geschlechts von \mathfrak{S} (siehe: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. Ann. of Math., II. s. 36, 568; dies. Zbl. 12, 197). Indem nämlich gewisse Faktoren $\beta_p(\mathfrak{S})$, die in deren Nenner auftreten, elementar nach oben abgeschätzt werden, ergibt sich für primitives \mathfrak{S} die untere Schranke (S = Diskriminante von \mathfrak{S}):

$$M(\mathfrak{S}) \geq \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2^{2m-2} \pi^{\frac{m(m+1)}{2}}} S^{1/2},$$

während alsdann andererseits $M(\mathfrak{S}) \leq 1/2$ sein muß, wenn das Geschlecht von \mathfrak{S} nur aus einer einzigen Klasse besteht. Die Aussage für imprimitive Formen folgt elementar. Mahler (Krefeld).

Kuroda, Sigekatu: Über die Approximation quadratischer Irrationalzahlen durch rationale. Proc. Imp. Acad. Jap. 12, 325—328 (1936).

Überlegungen über den Zusammenhang zwischen der absolut kleinsten durch $ax^2 + bxy + cy^2$ (a, b, c ganz, $a > 0$, $D = b^2 - 4ac > 0$) darstellbaren ganzen Zahl und der Annäherung von $\frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a}$ durch rationale Zahlen. Mahler (Krefeld).

Gruppentheorie.

Miller, G. A.: Groups of order less than 2^m having $m - 1$ or $m - 2$ independent generators. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 280—285 (1937).

Kořinek, Vladimír: Sur la décomposition d'un groupe en produit direct des sous-groupes. Čas. mat. fys. 66, 261—286 (1937).

Der Autor verschärft die von H. Fitting [Math. Z. 39, 16—30 (1934); 41, 380—395 (1936); dies. Zbl. 9, 202; 14, 104] und A. Kurosch [Math. Ann. 106, 107—113 (1932); dies. Zbl. 3, 243] gewonnenen Sätze über die Zerlegung einer Gruppe in ein direktes Produkt. Neben einer Reihe von Resultaten über die Beziehungen zwischen den Zerlegungen einer Gruppe \mathfrak{G} in ein direktes Produkt und gewissen homomorphen Abbildungen von \mathfrak{G} auf eine Untergruppe von \mathfrak{G} werden u. a. die folgenden Sätze bewiesen: Wenn für das Zentrum \mathfrak{Z} von \mathfrak{G} der Untergruppensatz gilt, d. h. wenn jede absteigende Kette von Untergruppen von \mathfrak{Z} nur endlich viele Glieder enthält, so gilt: 1. Sind zwei Zerlegungen von \mathfrak{G} in ein direktes Produkt direkt unzerlegbarer Gruppen gegeben, so sind die beiden Zerlegungen zentral-isomorph. 2. Sind zwei Zerlegungen von \mathfrak{G} in ein direktes Produkt gegeben, so lassen sich diese Zerlegungen so verfeinern [vgl. Fitting, l. c. (1936)], daß die verfeinerten Zerlegungen zentral-isomorph sind; darüber hinaus können dieselben auch noch so gewählt werden, daß für sie der — für die Zerlegungen einer endlichen Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren von O. Schmidt [Math. Z. 29, 34—41 (1929)] bewiesene — „Austauschsatz“ gilt. Diese Sätze bleiben auch für Gruppen mit Operatoren gültig, wenn man voraussetzt, daß für die in bezug auf den gegebenen Operatorbereich zulässigen Untergruppen der größten zulässigen Untergruppe von \mathfrak{Z} der Untergruppensatz gilt und nur direkte Zerlegungen in zulässige Faktoren betrachtet. Die Forderung, daß für \mathfrak{Z} der Untergruppensatz gelten soll, läßt sich durch noch schwächere Forderungen ersetzen. Magnus.

Sz. Nagy, Béla v.: Zur Theorie der Charaktere Abelscher Gruppen. Math. Ann. 114, 373—384 (1937).

The author sharpens the construction of A. Haar (this Zbl. 1, 55) introducing a topology and a (completely additive) mass-function into the “space” of the characters of any countable Abelian group \mathfrak{G} . Nagy’s mass is continuous for any infinite group, even when all elements are of finite order. Further, any function continuous over Nagy’s space can be approximated uniformly closely by finite linear combinations $\sum_A \chi_A(t) \lambda_A$ of the character-functions $\chi_A(t)$ of the elements A of \mathfrak{G} . Birkhoff.

Specht, Wilhelm: Zur Theorie der Gruppen linearer Substitutionen. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 47, 43—55 (1937).

Es wird das Verhalten einer in einem Zahlkörper P unzerfällbaren Gruppe (oder Halbgruppe) linearer Transformationen bei Erweiterung des Grundkörpers untersucht. Die Resultate sind analog zu denen von I. Schur [Trans. Amer. Math. Soc. 15, 159 (1909)] über das Verhalten einer in P irreduziblen Gruppe bei Übergang zu einem Erweiterungskörper. Hat die allgemeinste mit der unzerfällbaren Gruppe \mathfrak{G} vertauschbare Matrix r verschiedene charakteristische Wurzeln, so zerfällt \mathfrak{G} im Körper aller Zahlen in r absolut unzerfällbare Bestandteile, die alle gleichen Grad haben. Diese r Gruppen lassen sich als algebraisch konjugierte Gruppen in r konjugierten Körpern vom Grad r über P darstellen. Ist einer der Bestandteile in einem Körper vom Grad s über P darstellbar, so ist s durch r teilbar. Sind von den r Bestandteilen k wesentlich verschieden, so ist $m = \frac{r}{k}$ ganzzahlig, und jeder der Bestandteile tritt in \mathfrak{G} genau m -mal auf. Zwei in P unzerfällbare Darstellungen derselben Gruppe sind dann und nur dann ähnlich, wenn sie einen absolut unzerfällbaren Bestandteil gemeinsam haben.

R. Brauer (Toronto).

Neumann, B. H.: Identical relations in groups. I. Math. Ann. 114, 506—525 (1937).

Unter einem Endomorphismus einer Gruppe \mathfrak{G} versteht man eine homomorphe Abbildung von \mathfrak{G} auf sich oder auf eine Untergruppe von \mathfrak{G} . Ist \mathfrak{B} eine Untergruppe von \mathfrak{G} , deren Elemente bei allen Endomorphismen von \mathfrak{G} wieder auf Elemente von \mathfrak{B} abgebildet werden, so heißt \mathfrak{B} „vollinvariant“ in \mathfrak{G} . Sind W_i ($i = 1, 2, \dots$) irgendwelche Worte in irgendeiner Anzahl von Symbolen x_k ($k = 1, 2, \dots$), so erzeugen alle die Elemente von \mathfrak{G} , die man erhält, wenn man für die x_k in den W_i unabhängig voneinander alle Elemente von \mathfrak{G} einsetzt, eine vollinvariante Untergruppe von \mathfrak{G} , die der Verf. eine „Wortgruppe“ von \mathfrak{G} nennt. Ist \mathfrak{G} eine freie Gruppe, so sind alle vollinvarianten Untergruppen von \mathfrak{G} Wortgruppen, doch ist dies bei beliebigen Gruppen i. a. nicht der Fall. Es wird zunächst eine Reihe von weiteren Sätzen über Wortgruppen und ihre Faktorgruppen, insbesondere in einer freien Gruppe \mathfrak{G} , bewiesen und sodann das folgende Problem behandelt: In einer beliebigen Gruppe \mathfrak{G} die identischen Relationen aufzufinden, d. h. für $n = 1, 2, \dots$ diejenigen Worte in n Symbolen anzugeben, die bei Einsetzen willkürlicher Elemente von \mathfrak{G} für die in ihnen enthaltenen Symbole stets das Einheitselement von \mathfrak{G} liefern. Die Worte in n Symbolen bilden selber eine Gruppe, nämlich die freie Gruppe F_n von n Erzeugenden; die in der eben angegebenen Art identische Relationen von G liefernden Worte in n Symbolen bilden eine vollinvariante Untergruppe von F_n , die mit $\mathfrak{B}_n(\mathfrak{G})$ bezeichnet werde, während $\mathfrak{F}_n/\mathfrak{B}_n(\mathfrak{G}) = V_n(\mathfrak{G})$ gesetzt werde. $V_n(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{B}_n(\mathfrak{G})$ werden durch Angabe von n und \mathfrak{G} eindeutig bestimmt; ist \mathfrak{H} eine Untergruppe oder eine Faktorgruppe von G , so ist $V_n(\mathfrak{H})$ eine Faktorgruppe von \mathfrak{H} . Ist \mathfrak{G} endlich und von der Ordnung g , so ist auch $V_n(\mathfrak{G})$ endlich, und die Ordnung dieser Gruppe ist ein Teiler von g^n ; $\mathfrak{B}_n(\mathfrak{G})$ ist stets der Durchschnitt aller Untergruppen von \mathfrak{F}_n , deren Faktorgruppen in \mathfrak{F}_n mit \mathfrak{G} oder mit einer Untergruppe von \mathfrak{G} isomorph sind. — Für eine große Anzahl von weiteren Resultaten, insbesondere auch für eine nähere Charakterisierung der in einer Gruppe gültigen identischen Relationen muß auf die Arbeit selber verwiesen werden.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Ore, Oystein: Structures and group theory. I. Duke math. J. 3, 149—174 (1937).

Der vom Verf. aufgestellte Begriff der Struktur (dies. Zbl. 12, 5; 14, 197; 16, 203) wird auf die Gruppentheorie angewendet; die vorliegende Arbeit ist aber von den genannten unabhängig lesbar. Die Gesamtheit der Untergruppen einer Gruppe G ist eine Struktur. Die Regeln, denen Vereinigung und Durchschnitt folgen, sind in Beziehung auf diese beiden Operationen symmetrisch, folglich gilt das Dualitätsprinzip: Aus jedem richtigen Struktursatz über Gruppen erhält man einen richtigen Satz, indem man Vereinigung und Durchschnitt vertauscht. Zwei Strukturen heißen iso-

morph, wenn sie eineindeutig und Vereinigung und Durchschnitt erhaltend aufeinander abgebildet werden können; handelt es sich um Strukturen aus Untergruppen, so kann überdies die Forderung gestellt werden, daß für Paare einander entsprechender Untergruppen $A_1 > B_1$ und $A_2 > B_2$ die Indexgleichheit $(A_1 : B_1) = (A_2 : B_2)$ gilt, man spricht dann von starker Strukturisomorphie. Wenn die Untergruppe A normal in der Vereinigungsgruppe $[A, B]$ ist, so gilt bekanntlich der Isomorphiesatz $[A, B]/A \cong B/(A, B)$. Was kann man aussagen, wenn A nicht in $[A, B]$ normal ist? Allgemein gilt die Indexrelation $([A, B] : A) \geq (B : (A, B))$. Sind A und B vertauschbar, d. h. ist $AB = BA = [A, B]$, so können die Restklassen von $[A, B]$ nach A denen von B nach (A, B) umkehrbar eindeutig zugeordnet werden durch $b(A, B) \leftrightarrow bA$. Diese Zuordnung ist genau dann ein Strukturisomorphismus, wenn für $[A, B] \geq \bar{A} \geq A$ und $B \geq \bar{B} \geq (A, B)$ stets $A = [A, (B, \bar{A})]$, $\bar{B} = (B, [A, \bar{B}])$ gilt; sie ist ein starker Strukturisomorphismus, wenn A mit allen Untergruppen von B vertauschbar ist. Wenn die Untergruppe A von G mit allen Untergruppen von G vertauschbar ist, so heißt sie quasinormal in G . Es gilt also dem Isomorphiesatz entsprechend: Ist A in $[A, B]$ quasinormal, so ist (A, B) in B quasinormal und $[A, B]/A$ ist mit $B/(A, B)$ stark strukturisomorph. Auch das Zassenhaussche Lemma kann für quasinormale Gruppen ausgesprochen werden. Das Quasizentrum einer Gruppe besteht aus allen zyklischen Gruppen, die mit allen Untergruppen vertauschbar sind, es umfaßt Zentrum und Kern. Die alternierende Gruppe von $n > 4$ Zeichen hat keine echten quasinormalen Untergruppen. Hat man zwei Untergruppenketten $A = B_0 > B_1 > \dots > B_s = B$ und $A = C_0 > C_1 > \dots > C_r = B$ in einer Gruppe G , so kann man Analoga des Schreierschen Verfeinerungssatzes beweisen: Ist jedes B_i mit allen (B_{i-1}, C_j) , $j = 0, 1, \dots, s$ und jedes C_j mit allen (C_{j-1}, B_i) , $i = 0, 1, \dots, r$ vertauschbar, so gibt es Verfeinerungen beider Ketten mit der gleichen Bedingung, so daß die neuen Quotienten B_i/B_{i+1} und C_j/C_{j+1} einander so umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können, daß entsprechende Quotienten gleiche Indizes haben. Das gleiche gilt, wenn man die schärfere Bedingung einführt, daß jedes B_i mit jedem C_j vertauschbar ist. Verlangt man aber, daß B_i quasinormal in B_{i-1} ist, so werden entsprechende Quotienten der beiden Verfeinerungen stark strukturisomorph. Schließlich werden für Normalteiler Sätze von der Art des Zassenhausschen Lemmas bewiesen.

Deuring (Jena).

Analysis.

Seitz, George: Une remarque aux inégalités. Aktuár. Vědy 6, 167—171 (1937).

Es sei (a_{ik}) eine rechteckige Matrix. Dann gilt mit 4 Variablenreihen x_i, y_i, z_k, u_k ($i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$) die Identität

$$\left| \begin{array}{cc} \sum a_{ik} x_i z_k & \sum a_{ik} x_i u_k \\ \sum a_{ik} y_i z_k & \sum a_{ik} y_i u_k \end{array} \right| = \sum \left| \begin{array}{cc} x_\mu x_\nu & a_{\mu\varrho} a_{\mu\sigma} \\ y_\mu y_\nu & a_{\nu\varrho} a_{\nu\sigma} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} z_\varrho u_\varrho & \\ z_\sigma u_\sigma & \end{array} \right|, \quad \begin{array}{l} 1 \leq \mu < \nu \leq m \\ 1 \leq \varrho < \sigma \leq n \end{array}$$

Ist für diese $\mu, \nu, \varrho, \sigma$ stets

$$\left| \begin{array}{cc} x_\mu x_\nu & z_\varrho u_\varrho \\ y_\mu y_\nu & z_\sigma u_\sigma \end{array} \right| \geq 0, \quad \left| \begin{array}{cc} a_{\mu\varrho} a_{\mu\sigma} & \\ a_{\nu\varrho} a_{\nu\sigma} & \end{array} \right| \geq 0,$$

so folgt, daß die linke Seite ≥ 0 ist. Durch geeignete Spezialisierungen lassen sich hieraus mehrere bekannte Ungleichungen, u. a. die Tschebyscheffsche, gewinnen. (Sinnstörende Druckfehler bei den Indizes.)

W. Fenchel (Kopenhagen).

Beckenbach, E. F.: Generalized convex functions. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 363—371 (1937).

In $a < x < b$ sei eine zweiparametrische Schar $F(x; \alpha, \beta)$ von stetigen Funktionen mit der Eigenschaft gegeben, daß es zu x_1, x_2, y_1, y_2 mit $a < x_1 < x_2 < b$ genau eine dieser Funktionen gibt, für die

$$F(x_1; \alpha, \beta) = y_1, \quad F(x_2; \alpha, \beta) = y_2$$

ist. Man kann dann den Begriff der konvexen Funktion folgendermaßen verallge-

meinern, was für spezielle $F(x; \alpha, \beta)$ schon mehrfach geschehen ist: Die Funktion $f(x)$ heiße konvex in bezug auf die Schar F , wenn sie in jedem Teilintervall von $a < x < b$ nicht größer als diejenige Funktion F ist, die mit ihr in den Endpunkten des Teilintervalls übereinstimmt. — Für solche Funktionen $f(x)$ werden die Analoga zu einigen einfachen Eigenschaften gewöhnlicher konvexer Funktionen, insbesondere ihre Stetigkeit, bewiesen. Der Haupthilfssatz bringt die stetige Abhängigkeit der im obigen Sinne durch x_1, x_2, y_1, y_2 bestimmten Funktion F von diesen Größen zum Ausdruck.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Malchair, Henri: Sur les suites non croissantes de fonctions sousharmoniques. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 6, 163—167 (1937).

Soit dans un domaine D une suite non croissante de fets. sousharmoniques $f_n(x, y)$ admettant des plus petites majorantes harmoniques $\alpha_n(x, y)$ et supposons la limite de f_n non partout infinie soit $f(x, y)$ (nécessairement s.h.). Alors $f(x, y)$ admet une plus petite maj. harm. au plus égale à la fonction $\lim \alpha_n$. L'auteur donne de cette fet. $\lim \alpha_n$ quelques propriétés de comparaison avec les $f_n(x, y)$. Brelot (Alger).

Malchair, Henri: Sur les meilleures majorantes harmoniques et les plus petites majorantes harmoniques des fonctions sousharmoniques. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, IV. s. 1, 1—20 (1936).

L'auteur poursuit son étude (ce Zbl. 14, 22) des suites u_n de fonctions sousharmoniques quant à l'allure des plus petites et meilleures majorantes harmoniques. Si $u_n \rightarrow u$ uniformément dans D , la meilleure maj. harm. \bar{u}_n dans D' complètement intérieur converge (unif.) vers la meilleure maj. harm. \bar{u} . Si $u_n \nearrow u$ (s.h. et admettant une p.p. maj. harm. u^*), alors $u_n^* \nearrow u^*$. Le théor. IV (si $u_n \searrow u$, $u_n^* \searrow u^*$) est inexact car il entraînerait l'identité des meill. et p.p. maj. harm. dans un domaine D' quelconque. Si $u_n \searrow u$ et si D' est dom. de Dirichlet, $\bar{u}_n \searrow \bar{u}$ (la démonstration s'étend aussitôt à D' quelconque). Si $u_n \nearrow u$ s.h. et si D' est domaine de Dirichlet, $\bar{u}_n \nearrow \bar{u}$ (la dm. demande comme complément immédiat l'application de l'identité des meill. et p.p. maj. harm. pour un domaine D' de Dirichlet). M. Brelot (Alger).

Kantorovi, L.: On the moment problem for a finite interval. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 14, 531—537 (1937).

In the first §§ 1—3 the author discusses necessary and sufficient conditions in order that the Hausdorff moment problem (*) $\int_0^1 x_k dg(x) = \mu_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ have a solution $g(x)$ which is (1) non-decreasing, (2) an integral of a bounded function, (3) an integral of a function εL_p . It should be observed that author's method in (1) (via Bernstein's polynomials) is not new; it was used by Hildebrandt (this Zbl. 14, 207) for solutions of bounded variations, and the result follows from that of Hildebrandt. The method and result in (2) are those of Hausdorff [Math. Z. 16, 237 (1923)]. Case (3) was treated also by Hausdorff and Boas (this Zbl. 13, 256) by different methods with different (formally) final results. In § 4 the author proves that a linear positive functional defined over a linear manifold of the space M of bounded measurable functions, containing the element 1, can be extended to a positive linear functional over M , the proof being analogous to that of the classical theorem of Hahn-Banach. This extension theorem is applied in § 5 to the "finite moment problem" of Markoff [(*) with $k = 0, 1, 2, \dots, n$] allowing a simplified treatment of two problems discussed by Achyzer and Krein (this Zbl. 12, 293 and 13, 109).

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Jackson, Dunham: Polynomial approximation on a curve of the fourth degree. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 388—393 (1937).

Soit $P(x, y)$ un polynome de degré n . Si l'on a sur la courbe C ayant pour equation $x^4 + y^4 = 1$, $|P(x, y)| \leq L$,

il existe une constante absolue A , telle que l'on a sur la même courbe

$$\left| \frac{d}{ds} P(x, y) \right| \leq A n L,$$

où s désigne la longueur de la courbe à partir d'un point donné. Après avoir établi ce résultat, l'auteur en déduit que la suite des polynômes $P_n(x, y)$ rendant minimum l'intégrale

$$\int_C |f(s) - P_n(x, y)|^m ds \quad (m > 1)$$

converge uniformément vers la fonction $f(s)$ sur C , sous la condition que $f(s)$ satisfait à la condition de Lipschitz. La méthode s'applique à des cas plus généraux.

Serge Bernstein (Leningrad).

Chlodovsky, I.: Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle fini en séries de polynômes de M. S. Bernstein. *Compositio Math.* 4, 380—393 (1937).

Soit une fonction $f(x)$ définie dans $0 \leq x < \infty$ et soient $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ une suite croissante de nombres positifs et tels que $h_n \rightarrow \infty$. L'auteur considère la suite de polynômes

$$B_n[f(x), h_n] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{h_n k}{n}\right) \left(\frac{x}{h_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{h_n}\right)^{n-k}$$

qui représente une modification convenable de la suite de polynômes de S. Bernstein et démontre des théorèmes pour l'approximation de la fonction $f(x)$ par les polynômes $B_n[f(x), h_n]$. Citons le résultat suivant: Supposons que l'expression $\mu(h_n) e^{-\alpha^2 n/h_n}$, où $\mu(h_n) = \max |f(x)|$ pour $0 \leq x < h_n$, tende vers zéro pour chaque $\alpha \neq 0$ quand n croît indéfiniment. Si $f(x)$ est continue au point x , il existe pour cette valeur de x et pour chaque $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on veut un entier N tel que pour tous les $n > N$ on a l'inégalité $|f(x) - B_n[f, h_n]| < \varepsilon$. Il tire d'ici un théorème pour la convergence uniforme de ces polynômes dans l'intervalle $0 < a \leq x \leq b < \infty$, et étudie aussi le cas où $f(x)$ est une fonction entière d'ordre fini p et les nombres h_n vérifient les inégalités $h_n < n^{1/p+1+\varepsilon}$. Dans ce cas la convergence est uniforme vers $f(x)$ dans chaque cercle de rayon fini. La démonstration est basée sur les inégalités généralisées de Tchebycheff, qu'on utilise souvent dans la théorie des probabilités. *Obrechhoff.*

Koulik, S.: Les polynômes orthogonaux en connexion avec certains schèmes de distributions discrètes de probabilités. *J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine* Nr 1, 89—134 u. franz. Zusammenfassung 135—136 (1937) [Ukrainisch].

L'auteur s'occupe avec les polynômes orthogonaux $\varphi_m(x)$, vérifiant les conditions: $\sum_{x=0}^n p(x) \varphi_k(x) \varphi_s(x) = \varepsilon_{ks}$, $\varepsilon_{ks} = 0$ pour $s \neq k$, $\varepsilon_{kk} = 1$, où $p(x) > 0$ est définie pour $x=0, 1, 2, \dots, n$. Il considère les cas, où $p(x)$ représente les lois connues tirées de la théorie des probabilités. Il trouve des formules de dépendances récurrentes entre trois polynômes, des équations linéaires aux différences finies, des représentations au moyen de la fonction hypergéométrique. Citons par exemple les polynômes $\varphi_m(x)$ qui appartiennent à la fonction $p(x) = \binom{n}{x} (s-1)^{n-x}/s^n$. On a dans ce cas:

$$\varphi_m(x) = \left[\binom{n}{m} (s-1)^m \right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^m (1-s)^i \binom{n-x}{m-i} \binom{x}{i}.$$

A la fin du travail est donnée la généralisation de tous les résultats précédents, en considérant les polynômes avec la fonction caractéristique

$$p(x) = \binom{n}{x} \frac{a(a+q) \dots (a+x-1)q \cdot b(b+q) \dots (b-n-x-1)q}{(a+b)(a+b+q) \dots (a+b+n-1)q},$$

qui est la loi de Pólya.

N. Obrechhoff (Sofia).

Reihen:

Hornich, Hans: Über gewisse bedingt konvergente Produkte und Reihen. *Mh. Math. Phys.* 45, 351—357 (1937).

Etant données dans le plan E de la variable complexe deux suites $\{\alpha_i\}$ et $\{\beta_i\}$ de

nombres bornés en module par R , si l'on désigne par M l'ensemble des points α_i et de leurs points d'accumulation, si l'on suppose que $\sum_i (\alpha_i^x - \beta_i^x)$ converge quel que soit x , et converge absolument à partir de la valeur $n-1$ de x (il suffit pour cela que la convergence absolue soit réalisée pour $x = n-1$ et $x = n$), alors: 1° le produit $\prod_i \frac{\beta_i - \beta_i}{\beta_i - \alpha_i}$ converge simplement en tout point de $E-M$ et y représente une fonction régulière; 2° pour $|\beta| > R$, on a $\prod_i \frac{\beta - \beta_i}{\beta - \alpha_i} = e^{\sum_i \frac{1}{\beta} \sum_i \frac{\alpha_i^x - \beta_i^x}{x}}$; 3° par interversion

de l'ordre des facteurs, on obtient des fonctions différentes entre elles par des facteurs de la forme $e^{\frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \dots + \frac{a_{n-2}}{\beta^{n-2}}}$.

E. Blanc (Paris).

Hornich, Hans: Über Reihen, deren Glieder gegen Null konvergieren. *Mh. Math. Phys.* 45, 432—434 (1937).

Si $a_j \rightarrow 0$ et si $\sum_j |a_j|$ diverge, on peut toujours trouver une suite d'entiers l_j , telle que la série $\sum_j a_j e^{\frac{2\pi i l_j}{n}}$ converge vers un nombre donné A absolument quelconque, n étant un entier donné ≥ 3 .

E. Blanc (Paris).

Ganapathy Iyer, V.: On summation-processes in general. *J. Indian Math. Soc.*, N. s. 2, 222—238 (1937).

It has been proved by R. P. Agnew (this Zbl. 3, 55) that a non-convergent bounded sequence could be transformed into any given bounded sequence by a Toeplitz matrix; also that any unbounded sequence could be converted into any other sequence by such a matrix. It follows from these results that any given sequence could be converted into a convergent sequence by some summation-process. In this paper it is proved that any finite or enumerably infinite set of sequences could be transformed simultaneously into convergent sequences by a Toeplitz matrix. On the other hand it is shown that no such matrix can convert even a very restricted sub-class of bounded sequences into convergent sequences simultaneously. Not even an enumerably infinite number of such matrices can effect such a transformation.

Auszug.

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Hecke, E.: Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. II. *Math. Ann.* 114, 316—351 (1937).

Teil I s. dies. Zbl. 15, 402. In Teil II wird die Theorie für Modulfunktionen höherer Stufe entwickelt. Die Operatoren T_n für die Modulfunktionen der Dimension $-k$ und der Stufe Q (Fkt. $(-k, Q)$) werden für jede Stufe Q gesondert erklärt. Das geht ohne Schwierigkeiten für $(n, Q) = 1$. Für $(n, Q) > 1$ erweist es sich als notwendig, die lineare Schar der Fkt. $(-k, Q)$ in Teilscharen zu zerlegen, für die die T_n einzeln angesetzt werden. Eine Fkt. $(-k, Q)$ heißt vom Teiler t , wenn die in ihrer Potenzreihe vorkommenden Exponenten mit Q den größten gemeinsamen Teiler t haben. Die Fkt. vom Teiler t werden weiter unterschieden nach dem Verhalten bei den Modulsubstitutionen R_n , die durch $R_n \equiv \begin{pmatrix} n^{-1} & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \pmod{Q}$ bis auf Faktoren aus der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(Q)$ erklärt sind. Eine Fkt. vom Teiler t heißt normiert, wenn sie Eigenfunktion für alle R_n ist, $F|R_n = \varepsilon(n)F$, der Faktor $\varepsilon(n)$ heißt der Charakter von F . Für die Schar aller Fkt. $(-k, Q)$ vom Teiler t und vom Charakter ε können die Operatoren T_m^t mit $\left(m, \frac{Q}{t}\right) = 1$ folgendermaßen erklärt werden:

$$F(\tau)|T_m^t = m^{k-1} \sum_{\substack{a \equiv m \\ b \equiv 0 \pmod{d} \\ d > 0}} \varepsilon(a) F\left(\frac{a\tau + \frac{bQ}{t}}{d}\right) d^{-k}.$$

Die F_m spannen einen kommutativen Operatorenring über dem Körper der komplexen Zahlen auf. Ist F^1, \dots, F^r eine Basis der Linearschar, $F^e | T_m' = \sum_{\sigma} \lambda_{e\sigma}(n) F^{\sigma}$, und gelten die Entwicklungen $F^e(\tau) = \sum_{m \geq 0} a^e(m) e^{\frac{2\pi i \tau}{Q} m t}$, so gibt es r konstante Matrizen B^v mit $\lambda(m) = (\lambda_{e\sigma}(m)) = \sum_{v=1}^r a^v(m) B^v$, und die Matrix $\Phi(s) = \sum_{v=1}^r \varphi^{(v)}(s) B^v$, die man aus den zugeordneten Dirichletreihen $\varphi^{(v)}(s) = \sum_{m \geq 1} a^v(m) (mt)^{-s}$ bilden kann, hat die Produktentwicklung

$$\Phi(s) = \prod_p (E - \lambda(p) p^{-s} + \varepsilon(p) p^{k-1-2s} E)^{-1}.$$

Die Eigenfunktionen des Operatorenrings geben Anlaß zu einzelnen Dirichletreihen mit Produktentwicklung, aber umgekehrt gilt auch, daß eine Modulform, deren zugeordnete Dirichletreihe ein Eulerprodukt hat, Eigenfunktion eines Operatorenrings mit passendem t ist. Die Schar der Fkt. $(-k, Q)$ vom Teiler t und vom Charakter ε zerfällt in zwei operatorinvariante Teilscharen: Spitzenformen $S(t, \varepsilon, Q)$ und Eisensteinreihen $E(t, \varepsilon, Q)$. Die Dirichletreihen zu den $E(t, \varepsilon, Q)$ sind linear äquivalent zu den Reihen $(t_1 t_2)^{-s} L(s, \chi_1) L(s - k + 1, \chi_2)$, wo $t_i | Q, \chi_i$ Charakter mod $Q/t_i, \chi_1 \chi_2 (-1) = (-1)^k$, $L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) m^{-s}$ und für $k=2$ nicht gleichzeitig $\chi_1 = 1$ und $Q = t_2$ ist. Die

Reduktion der Matrix $\Phi(s)$ oder besser der zugeordneten Matrix $B(\tau)$ von Modulformen kann mittels der Darstellungstheorie der Modulargruppe $\bar{\Gamma}(1)/\bar{\Gamma}(Q)$ noch weiter getrieben werden: Da nämlich die Fkt. $(-k, Q)$ durch beliebige Moduls substitutionen unter sich linear transformiert werden, aber bei $\bar{\Gamma}(Q)$ invariant sind, so setzen sie sich bei der vollen Modulgruppe nach einer Darstellung der Modulargruppe modulo Q um, so daß die Schar der Fkt. $(-k, Q)$ nach irreduziblen Darstellungen der Modulgruppe zerlegt werden kann. Für Primzahlstufe Q wird die Theorie ins einzelne verfolgt. Die Fülle der Ergebnisse hier zu schildern, ist nicht möglich, es sei nur der folgende Satz angeführt: q sei eine Primzahl $\equiv 3 \pmod{4}$. Die Zetafunktion des Körpers $K(\sqrt{-q})$ ist die Dirichletreihe derjenigen eindeutig bestimmten Modulform von der Art $(-1, Q)$, welche charakteristische Wurzel der Matrizen $B(\tau)$ zu gewissen Darstellungen $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}^{(1)} + \mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}^{(2)}$ der Modulargruppe mod q ist und bei $\tau = \infty$ nicht verschwindet.

Deuring (Jena).

Jessen, Børge: Über die Säkularkonstante einer fastperiodischen Funktion. Mat. Tidsskr. B 1937, 45–48 [Dänisch].

Zu jeder der Null nicht beliebig nahekommenen fp. Funktion $f(t)$ gibt es eine „Säkularkonstante“ c derart, daß die Differenz von $\arg f(t)$ und ct fp. ist. Dieser zuerst vom Ref. als Vermutung formulierte Bohrsche Satz kann dadurch ergänzt werden, daß c im Modul der Exponenten λ_n von $f(t)$ liegen muß (H. Bohr, dies. Zbl. 5, 63). Der Verf. fügt hinzu, daß c zwischen der oberen und unteren Grenze aller λ_n liegt. Der Beweis erfordert unter Benutzung des verschärften Approximationssatzes eine elementar-kinematische Überlegung und kann derart gestaltet werden, daß im Falle einer der Null nicht beliebig nahekommenen analytischen fp. Funktion $f(s) = f(\sigma + it)$ sich $c = c(\sigma)$ als monoton nicht abnehmend erweist (vgl. dazu eine Arbeit des Verf., dies. Zbl. 7, 156).

Wintner (Baltimore).

Fenchel, Werner: Über Bewegungen, die bis auf orthogonale Transformationen fastperiodisch sind. Mat. Tidsskr. B 1937, 75–80 [Dänisch].

Es sei $(x_1, \dots, x_n) = x = x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, eine stetige Vektorfunktion mit der Eigenschaft, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dichte Menge von Verschiebungszahlen τ gibt derart, daß der euklidische Abstand der beiden Punkte $x(t + \tau)$, $Dx(t)$ für eine passend gewählte Bewegung $D = D(\tau; \varepsilon)$ des n -dimensionalen Raumes und für alle t kleiner als ε ist (vgl. Verf. und Jessen, dies. Zbl. 11, 346). Es wird gezeigt, daß es dann einen konstanten Vektor c gibt derart, daß die n Komponenten der Vektor-

funktion $x(t) - ct$ im Bohrschen Sinne fp. sind. Für $n = 1$ ist der Satz im wesentlichen mit einem Bohrschen identisch (vgl. das vorst. Ref.). *Wintner* (Baltimore).

Spezielle Funktionen:

McLachlan, N. W., and A. L. Meyers: Operational forms for Bessel and Struve functions. *Philos. Mag.* 23, 918—925 (1937).

A table is given of 32 operational forms of Bessel functions of various types; a second table gives 19 Operational forms of Struve functions and functions associated with them. Contour integrals are then given for the Struve functions, a typical integral being (for $t > 0$)

$$H_0(t) = (1/\pi^2 i) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(z - t^2/4z) \log[(2z + t)/(2z - t)] dz/z.$$

The paper ends with a table of 10 operational forms of integral Bessel functions.

H. Bateman (Pasadena).

Mayr, Karl: Über die Lösung algebraischer Gleichungssysteme durch hypergeometrische Funktionen. *Mh. Math. Phys.* 45, 280—313 (1937).

Mayr, Karl: Berichtigung der Arbeit: „Über die Lösung algebraischer Gleichungssysteme durch hypergeometrische Funktionen“. (*Mh. f. Math. u. Phys.*, Bd. 45, S. 280—313.) *Mh. Math. Phys.* 45, 435 (1937).

Im Gegensatz zu den bisher angewandten Methoden zur Lösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen, deren Veränderliche die Gleichungskoeffizienten sind, stellt der Verf. das System der Differentialgleichungen an die Spitze, dem die gesuchte Lösung genügt. Er kann es unmittelbar aus der algebraischen Gleichung gewinnen und konstruiert auf Grund dieses Systems die gesuchte Lösung der algebraischen Gleichung. Im Fall einer Gleichung mit einer Unbekannten

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n = 0$$

wird x auf die Form

$$x = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \varphi \left\{ \frac{\lambda_2 \lambda_0}{\lambda_1^2}, \frac{\lambda_3 \lambda_0^2}{\lambda_1^3}, \dots, \frac{\lambda_n \lambda_0^{n-1}}{\lambda_1^n} \right\}$$

gebracht und für die von $(n - 1)$ Veränderlichen abhängige Funktion φ ein System von $(n - 1)$ Differentialgleichungen angeben, aus denen sich φ , nach hypergeometrischen Funktionen entwickelt, bestimmen läßt. Der Vorteil dieser Methode beruht darin, daß sie unmittelbar auch auf Systeme algebraischer Gleichungen anwendbar ist und daß sie jede beliebige Wurzel liefert. Der Verf. gibt für einige algebraische Systeme die entsprechenden Differentialgleichungen an und zeigt die Methode, nach der man mit Hilfe dieser Systeme die durch bestimmte Bedingungen charakterisierten Wurzeln finden kann.

v. Koppenfels (Hannover).

Erdélyi, Artur: Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen. II. Mitt. Reihenentwicklungen. *Math. Z.* 42, 641—670 (1937).

The author gives a great number of expansions in series, whose terms are confluent hypergeometric functions and whose sum can be expressed in a closed form. They include as particular cases expansions in series of Bessel functions, parabolic-cylinder functions, and the polynomials of Laguerre and Bateman: some of them were already known, but the majority are new, and many of them are very striking and may prove to be important in those branches of mathematical physics (e.g. wave-mechanics) in which confluent hypergeometric functions are used. The series are of the three types

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r N_{k+r, m}(t), \quad \sum_{r=0}^{\infty} a_r N_{k, m+r}(t), \quad \sum_{r=0}^{\infty} a_r N_{k+\frac{r}{2}, m+\frac{r}{2}}(t)$$

where the coefficients a_r are independent of t , and $N_{k, m}(t)$ is the confluent hypergeometric function

$$N_{k, m}(t) = \frac{t^{2m} e^{-\frac{1}{2}t}}{\Gamma(2m+1)} \left\{ 1 + \frac{m + \frac{1}{2} - k}{1!(2m+1)} t + \frac{(m + \frac{1}{2} - k)(m + \frac{3}{2} - k)}{2!(2m+1)(2m+2)} t^2 + \dots \right\}.$$

The series of the first type converge, like trigonometric series, in a strip parallel to the real axis of the t -plane, while series of the second and third types converge like power-series. (I. see this Zbl. 15, 211.) *Whittaker* (Edinburgh).

Krygowski, Zdislas: Remarques sur la formule de Kiepert dans la théorie des fonctions elliptiques. Bull. Sci. math., II. s. 61, 110—114 (1937).

Die Weierstraßsche ganze Funktion $\sigma(u)$ gibt mit $k = 1, 2, \dots$ den elliptischen Quotienten $[\sigma(u)]^{-k} \sigma(ku)$, dessen Darstellung als Polynom in $p'(u), \dots, p^{(2k-3)}(u)$ durch Kiepert gefunden wurde. Des Verf. Beweis ist unabhängig vom Additionstheorem für $p(u)$; gebraucht wird die Darstellung von σ -Funktionen durch lineare Verbindungen ebensolcher mit vollständiger Induktion nach k . *Wilhelm Maier*.

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Kampen, E. R. van, and Aurel Wintner: On an absolute constant in the theory of variational stability. Amer. J. Math. 59, 270—274 (1937).

The differential equation $x'' + p(t)x = 0$, $p(t)$ real, continuous, and periodic, $-\infty < t < +\infty$, is said to be of stable type if each solution is bounded, $-\infty < t < +\infty$. It is known that if $p(t) \geq 0$ and positive for some t , a sufficient condition for stability

is given by $T \int_0^T p(t) dt \leq 4$, where T is the period of $p(t)$. This paper shows that under

the same hypotheses [or even if $p(t)$ is analytic or if $p(t) > 0$], the stated condition is necessary. *Hedlund* (Bryn Mawr).

Mitrinovitch, Dragoslav S.: Sur une équation différentielle du premier ordre intervenant dans divers problèmes de géométrie. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 1706—1708 (1937).

L'auteur considère l'équation $y'^2 + a_2(x)y^2 + 2a_1(x)yy' + a_0(x) = 0$. La substitution $y' + (a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_2})y = \sqrt{z}$ la ramène à la forme d'Abel $(z + P)\frac{dz}{dx} = 2Mz^2 + 2Nz$.

S. Finikoff (Moscou).

Piesch, H.: Über ein Verfahren der Integration homogener Differentialgleichungen. Elektr. Nachr.-Techn. 14, 145—155 (1937).

Bei Schwingungsgleichungen der Form $v'' + f(v)v' - \omega^2 v = 0$, die wegen Fehlen der unabhängigen Veränderlichen in Differentialgleichungen erster Ordnung überführbar sind, können „Grenzzykel“ (Grenzkurven, denen sich Integralkurven asymptotisch nähern) als stationäre Lösungen auftreten. Unter gewissen Voraussetzungen gehören die Punkte, in denen simultan die Gleichungen $\frac{d^2 v'}{dv^2} = \frac{d^3 v'}{dv^3} = 0$ erfüllt sind, dem Grenzzykel an, der dann von diesen Punkten aus durch Integration gefunden werden kann. Zahlenbeispiel.

Collatz (Karlsruhe).

Chen, Kien-Kwong: Transcendence of functions satisfying Riccati differential equations. II. J. Chin. Math. Soc. 2, 84—97 (1937).

Seien $R(x) \neq 0$, $S(x)$ und $T(x)$ drei rationale Funktionen. In seiner ersten gleichnamigen Arbeit (dies. Zbl. 15, 154) untersuchte Verf. die Riccatische Gleichung

$$W' + \frac{R'}{R}W + S + TW^2 = 0. \quad (1)$$

Sein Beweis, daß dieselbe durch keine algebraische Funktion mindestens dritter Ordnung befriedigt wird, erwies sich nachträglich als unvollständig, und er gibt deshalb im vorliegenden 2. Teil hinreichende Bedingungen hierfür; es genügt anzunehmen, daß $\lim_{x \rightarrow \infty} xS(x)T(x) \neq 0$ ist oder daß $S(x)T(x)$ einen Pol mindestens dritter Ordnung hat oder daß $S(x)T(x)$ an einer Stelle α einen Pol zweiter Ordnung mit irrationalem Limes $\lim_{x \rightarrow \alpha} (x - \alpha)^2 S(x)T(x)$ besitzt usw. — Weiter gibt Verf. eine hinreichende Bedingung für die Funktionen R, S, T , so daß sogar jede Lösung von (1) transzendent ist; sind alle drei Funktionen reell für reelles x , so lassen sich hierfür noch einfachere Bedingungen finden, die eingehend untersucht werden. *Mahler* (Krefeld).

Lewis jr., D. C.: On line integrals and differential equations, especially those of dynamics. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 277—282 (1937).

The author develops a formula which gives the relation between the values of the line integral $\int \sum_{i=1}^n A_i dx_i$, A_i arbitrary of Class C'' , taken over two closed curves lying on a tube of trajectories of a system of ordinary differential equations and such that each curve cuts a given trajectory the same number of times and in the same order. Application to the equations of dynamics yields results which include formulas due to Taylor (see this Zbl. 10, 226).

Hedlund (Bryn Mawr).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Brillouin, Léon: Perturbation d'un problème de valeurs propres par déformation de la frontière. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 1863—1865 (1937).

Die wellenmechanische Störungstheorie behandelt das Problem, Eigenwerte und Eigenfunktionen für einen hermiteschen Operator $H_0 + \lambda H_1$ (mit kleinem λ) zu finden, wenn diejenigen von H_0 bereits bekannt sind. Für manche Aufgaben (Metalltheorie) ist aber die folgende Frage wichtig: Es seien bekannt die Eigenwerte und Eigenfunktionen eines Operators H unter der Voraussetzung, daß auf einer (im Endlichen gelegenen) geschlossenen Fläche $f_0(x, y, z) = 0$ eine lineare Randbedingung (etwa Eigenfunktion = 0) vorgeschrieben ist. Welche Änderungen treten ein, wenn statt dessen auf $f_0(x, y, z) = \lambda$ dieselbe Randbedingung zu erfüllen ist? Verf. zeigt, daß diese Frage durch einen einfachen Kunstgriff auf die obige, gewöhnliche Frage zurückgeführt werden kann.

P. Jordan (Rostock).

McLachlan, N. W., and A. T. McKay: On a formula of Rayleigh for velocity potential. J. Franklin Inst. 223, 501—509 (1937).

This paper discusses the validity of the application of a widely used formula (due to Rayleigh) in acoustics. The paper closes with a discussion by Ballantine who points out that whilst the formula is applicable (as shown by McLachlan and McKay) to the problem of a plane circular disc vibrating in an infinite baffle it is not applicable (in the modified form usually given) in general.

Murnaghan.

Vecoua, I.: Randwertaufgabe der Schwingungen einer unendlichen Schicht. Trav. Inst. Math. Tbilissi 1, 141—163 u. deutsch. Zusammenfassung 164 (1937) [Georgisch].

Verf. stellt und löst das Problem der elastischen Schwingungen einer unendlichen Schicht bei verschiedenen Anfangs- und Randbedingungen. Besonders eingehend wird der wichtige Fall behandelt, wenn auf den Grenzflächen Spannungen vorgegeben sind. Verf. geht aus vom Problem der elastischen Schwingungen des Halbraumes, unter dem Einfluß einer am Rande konzentrierten Kraft, und stellt ein Reflexionsgesetz für longitudinale und transversale Wellen an den Grenzflächen der Schicht auf. Für die ganze Arbeit ist die Idee der funktional-invarianten Lösungen der Wellengleichung grundlegend, wie sie von V. Smirnof und S. Soboleff auf dynamische Elastizitätsprobleme angewandt worden ist.

V. Kupradze (Tbilissi, USSR.).

Muschelišvili, N.: Über eine numerische Lösung des ebenen Elastizitätsproblems. Trav. Inst. Math. Tbilissi 1, 83—87 u. russ. Zusammenfassung 87 (1937) [Georgisch].

In Arbeiten, die in den Mitt. Akad. Wiss. USSR. 3, Nr. 1 u. 2 (1934) erschienen sind, führt Verf. die grundlegenden ebenen Randwertprobleme der Elastizitätstheorie auf ein System überaus einfacher Integralgleichungen zurück. Dies System besitzt die Eigenschaft, daß das zugehörige homogene System nichttriviale Lösungen zuläßt. In der vorliegenden Arbeit fügt Verf. dem Grundsystem noch eine Reihe von Integralformeln und endlichen Beziehungen bei, welche die gesuchten Funktionen vollkommen festlegen. Das auf diese Weise erhaltene System läßt sich, mit Hilfe von mechanischen Quadraturen, durch ein System linearer algebraischer Gleichungen annähern, das mit der Methode der kleinsten Quadrate gelöst werden kann.

V. Kupradze.

Bock, Ph.: Die Temperaturverteilung in einem rechteckigen Querschnitt, wenn die Temperatur an der Berandung vorgegeben ist. Čas. mat. fys. **66**, 296—304 (1937) [Tschechisch].

Die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung für ein Rechteck wird bei gewissen speziellen Randwerten mit Hilfe der Bernoullischen Methode der Partikularlösungen angegeben und weiterhin durch eine Fouriersche Doppelreihe bzw. durch Jacobische Thetafunktionen ausgedrückt. *E. Rothe* (Breslau).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Niemytzki, V.: Sur les équations intégrales non linéaires comparables aux équations linéaires. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **15**, 17—19 (1937).

The author considers the integral equation (*) $\psi(x) = \int K(x, s) f(s, \varphi) ds$ of Fredholm type where φ is the unknown function and the kernel $K(x, s)$ satisfies conditions (1) $\int K^2(x, s) ds \leq B = \text{const}$; (2) $\int |K(x+h, s) - K(x, s)| ds < \varepsilon$ for $|h| < \delta = \delta(\varepsilon)$, uniformly in x . Let $f(s, u)$ be continuous in u and $|f(s, u)| \leq C|u| + D$ where C and D are constants such that $C \sup_x \int |K(x, s) ds| < 1$. Then (*) admits of a solution. This solution is unique if, in addition $|f'_u(s, u)| < C$ and $C \sup_x \int |K(x, s)| ds < 1$.

These results, which can be extended to the case of systems in any number of unknown functions, represent a generalization and simplification of results obtained previously by several other authors. The paper contains a considerable number of misprints. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Raff, Hermann: Über lineare Integraltransformationen. Mh. Math. Phys. **45**, 379—393 (1937).

Wie in einer früheren Arbeit [Math. Z. **41**, 605—629 (1936); dies. Zbl. **14**, 351] betrachtet Verf. lineare Integraltransformationen der Gestalt $(1) g(y) = \int_{\mathfrak{M}} \varphi(t, y) f(t) dt$

und leitet eine Reihe von Sätzen ab, die sowohl für den Riemannschen wie den Lebesgueschen Integralbegriff gelten. So ist z. B. (1) dann und nur dann konvergenzerzeugend, wenn 1. $\varphi(t, y)$ für jedes y einer Umgebung von η absolut integrierbar ist und ein $\mu > 0$ existiert, so daß in einer Umgebung von η $\int_{\mathfrak{M}} |\varphi(t, y)| dt \leq \mu$ bleibt, und wenn 2. für jede meßbare Teilmenge \mathfrak{S} von \mathfrak{M} $\lim_{y \rightarrow \eta} \int_{\mathfrak{S}} \varphi(t, y) dt$ existiert. Analoge

Kriterien dafür, wann (1) annullierend, konvergenzerhaltend und regulär ist. Vergleich mit den früher vom Verf. dafür abgeleiteten Kriterien. *G. Köthe*.

Plancherel, M., et G. Pólya: Fonctières entières et intégrales de Fourier multiples. Comment. math. helv. **9**, 224—248 (1937).

Let $z = (z_1, \dots, z_n)$ be point of a complex n -dimensional space, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ "real" points of this space, and $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 + 1$. Let $F(z)$ be an entire function of z of exponential type, i.e. $|F(z)| < A \exp\{a(|z_1| + \dots + |z_n|)\}$ where A and a are positive constants. Let $h(\lambda) = \sup_{\alpha} \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \log |F(\alpha - i\lambda r)|$.

We say $F(x) \in L_2$ if $\int |F(x)|^2 dx < \infty$. The authors prove: A necessary and sufficient condition that a function $F(z)$ of exponential type would belong to L_2 is that the (n -dimensional) Fourier transform $\Phi(y)$ of $F(x)$ vanish almost everywhere outside a certain bounded domain. This is an extension to n dimensions of a classical theorem of Paley and Wiener [Amer. Math. Soc. Colloquium publ. **19**, 12—13 (1934)], but the proof given by the authors is entirely different and leads to the additional results $h(\lambda) = \chi(\lambda)$ where $\chi(\lambda)$ is the function of support (Stützfunktion) of the smallest convex domain \Re outside of which $\Phi(y) = 0$. In the case $n = 1$, by using the method of Phragmén-Lindelöf, the authors obtain a more precise result: Let $F(z)$ be an entire function of exponential type such that

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \log |F(-ir)| = h, \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \log |F(ir)| = h', \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} F(x) = 0.$$

Then $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r F(x) e^{-ixy} dx = 0$ for $y > h$ and $y < -h'$. Various applications of these theorems are also given.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Fortet, Robert: Sur l'itération de certaines substitutions linéaires. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 1392—1394 (1937).

The linear substitutions A are $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$, y_i and x_i of Hilbert space and $\sum_{ik} |a_{ik}|^2 < \infty$, so that the Fredholm theorems apply. It is announced that if A is minimal on the left (or right) in the sense that a_{ik} is such that $\sum_{ik} |a_{ik}|^2$ is minimal for all substitutions having the same characteristic function on the left (or right) then the iterated substitutions $A^{(n)}$ are expressible in the form $\sum_j Q_j(n)/\lambda_j^n$, λ_j characteristic values of A , $Q_j(n)$ polynomials in n and the series uniformly convergent. Further if the substitution is quasi-regular, i.e. the linear spaces Φ and Ψ determined by the characteristic functions on the left and right of A satisfy the condition $\Phi = \bar{\Psi}$, then the series of principal parts A_j converges uniformly if the angle between the variety Φ_j determined by the characteristic values with index at most j and that of the complementary set relative to Φ is bounded from zero in j , the case of regularity of Monteiro (this Zbl. **12**, 20) corresponding to the angle $\pi/2$. The results are applied to the difference equations: $x_i(n+1) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k(n)$. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Caccioppoli, R.: Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e applicazioni ad alcune equazioni funzionali non lineari e al problema di Plateau. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **24**, 258—263 (1936).

Verf. beweist nichtlokale (nichteindeutige) Existenzsätze für stetig differenzierbare Transformationen (1) $y = T(x)$ in linearen metrischen und vollständigen Räumen mittels der Diskussion der Verzweigungsgleichungen, was natürlich spezielle Annahmen über Transformationen (1) erfordert: a) das Differential $\delta y = D(x, \delta x)$ von (1) erschöpft in eindeutiger Weise den δx - und den δy -Raum, wenn man von diesen Räumen je einen n -dimensionalen (n endlich und von x abhängig) Unterraum „wegläßt“, b) kompakte y -Mengen besitzen kompakte Urbilder. Übrigens sind die Verzweigungsgleichungen in einem passenden ξ -Raum lokal der Form: $\xi + F(\xi)$ mit vollstetigem $F(\xi)$. Dies wird auf Randwertaufgaben im großen für nichtlineare elliptische Differentialgleichungen angewendet. Für nichtlokale Behandlung der Existenzsätze mittels der Schmidtschen Verzweigungsgleichungen im Falle der Integralgleichungen (analytische, nichtanalytische) vgl. J. Leray (dies. Zbl. **6**, 167), mittels der Theorie der Operatoren in abstrakten Räumen der Gestalt $x + F(x)$ mit vollstetigem $F(x)$ Leray-Schauder (dies. Zbl. **9**, 73, Kap. I—III, Operatoren anderer Gestalt Kap. V), für die diesbezüglichen Anwendungen auf elliptischen Differentialgleichungen die letztgenannte Arbeit, Kap. IV—V. *Schauder* (Lwów).

Caccioppoli, R.: Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e applicazioni ad alcune equazioni funzionali non lineari e al problema di Plateau. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **24**, 416—421 (1936).

1. Beispiel einer unbeschränkt lösbaren nichtlinearen Integralgleichung [vgl. f. Leray, dies. Zbl. **6**, 167, wo auch andere übrigens verallgemeinerungsfähige Integralgleichungen (z. B. das Carlemansche Problem auf beliebige lineare elliptische Differentialgleichungen, Systeme von Integralgleichungen usw.) behandelt werden]. 2. Verf. behauptet, daß die Sätze über abstrakte Transformationen aus Teil I (vgl. vorst. Ref.) auch dann bestehen bleiben, wenn es sich um krummlinige, unendlichdimensionale Mannigfaltigkeiten handelt, die regulär sind. 3. Anwendung auf die erste

Randwertaufgabe in Parameterform der invariant geschriebenen elliptischen Differentialgleichung; die Lösungsfläche soll regulär sein, d. h. es ist $EG - F^2 > 0$. 4. Nach Verf. lassen sich die Überlegungen beim Plateauschen Problem anwenden und liefern die Existenz von regulären Minimalflächen, die durch gegebene nichtverknottete und sich nicht durchkreuzende geschlossene Kurven hindurchgehen. Die Begründung der Definitionen sowie die Durchführung der fehlenden Beweise (2, 3, 4) ist noch notwendig. *Schauder* (Lwów).

Funktionentheorie:

Lammel, Ernst: Über eine Verallgemeinerung der Gleichverteilung und ihre Anwendung in der Funktionentheorie. *Mh. Math. Phys.* 45, 366—378 (1937).

Für $\nu = 1, 2, \dots$ sei $|a_\nu| = \rho < 1$ und $|\beta_\nu| = 1$. — Es wird bewiesen: Notwendig und hinreichend dafür, daß jede für $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$ sich in eine Reihe

$$f(z) = A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{z - a_\nu}{1 - \bar{\beta}_\nu z}$$

entwickeln läßt, sind die Relationen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{1}{\beta_\nu}\right)^\mu = 0$

und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n a_\nu^\mu = 0$, $\mu = 1, 2, \dots$. Für die durch $f(z)$ dann eindeutig bestimmten

Koeffizienten A_μ , deren Integraldarstellung angegeben wird, gilt $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt[\mu]{|A_\mu|} \leq 1$. —

Die Bedingung für die a_ν ist notwendig und hinreichend dafür, daß für jede in $|z| < 1$

reguläre Funktion $g(z)$ die Relation $g(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n g(a_\nu)$ gilt, während die Bedingung

für die β_ν die Gleichverteilung dieser Stellen auf $|z| = 1$ besagt [vgl. Weyl, *Math. Ann.* 77, 313—352 (1916)]. *Rogosinski* (Berlin).

Minetti, Silvio: Sur quelques points de la théorie des fonctions et sur un nouveau critérium de normalité d'une famille de fonctions analytiques. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 16, 155—178 (1937).

Le contenu du Mémoire ne justifie pas les qualificatifs qu'emploie l'A. dans son introduction pour caractériser ses propres résultats. Les résultats du chapitre II ne font que traduire la formule de Poisson écrite avec une variable complexe. Le critère de normalité donné par l'auteur n'est nullement „beaucoup plus général que le critérium fondamental de normalité, à savoir celui des deux valeurs exceptionnelles“. Bien, au contraire ce critère est une conséquence de la normalité des familles dont les valeurs ne pénètrent pas dans un domaine donné. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Kotliansky, D. M.: Sur certaines applications des formes quadratiques au problème de Nevanlinna-Pick. *J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine* Nr 1, 73—87 u. franz. Zusammenfassung 87—88 (1937) [Ukrainisch].

L'A. donne une condition portant sur une certaine forme d'Hermite, pour que le problème d'interpolation: $f(z_j) = \omega_j$ ($j = 1 \dots n + m$), $f'(z_j) = v_j$ ($j = 1, 2, \dots n$) [$z_1 \dots z_n, \omega_1 \dots \omega_n, v_1 \dots v_n$ réels $Jf(z) > 0$ pour $Jz > 0$] soit possible. *Mandelbrojt*.

Chuang, Chi-Tai: On the distribution of the values of meromorphic functions of infinite order. *J. Chin. Math. Soc.* 2, 21—39 (1937).

L'auteur démontre les résultats résumés dans une Note précédente (voir ce Zbl. 14, 267), qui généralisent ceux de Hiong (voir ce Zbl. 12, 264). Il étudie les zéros de l'ensemble des fonctions $f(z) - g(z)$, où $f(z)$ est une fonction méromorphe donnée d'ordre infini, $\varrho(r)$ un de ses ordres au sens de Hiong, et où $g(z)$ est une fonction méromorphe arbitraire dont l'ordre est inférieur à $\varrho(r)$ [$T(r, g)$ étant la fonction de Nevanlinna, on a $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g)}{\varrho(r) \log r} < 1$]. Pour toutes ces fonctions sauf deux au plus, le nombre $n(r, g)$ des zéros de $f - g$ pour $|z| < r$ est de l'ordre de $\varrho(r)$; on a

$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r, g)}{\varrho(r) \log r} = 1$. Ceci précise un énoncé de Blumenthal. On a un énoncé analogue en ce qui concerne les directions de Borel. Il existe une direction Δ au moins pour laquelle la proposition précédente reste vraie lorsqu'on se borne à prendre les zéros appartenant à un angle d'ouverture quelconque positive admettant Δ pour bissectrice. L'auteur donne d'autres généralisations et étend ses résultats aux fonctions méromorphes et d'ordre infini dans un cercle $|z| < 1$: il existe au moins un point de Borel commun à toutes les fonctions $f(z) - g(z)$ sauf deux, dont l'ordre est celui de $f(z)$.

G. Valiron (Paris).

Tomotika, Susumu: New derivation of the formula solving a kind of Dirichlet's problem for a ring region. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 427—435 (1936).

The author derives an expression for an analytic function $F(z)$, $z = re^{i\theta}$, which is regular and single valued everywhere in an annular region $0 < q < |z| < 1$, whose real part on the outer circle assumes assigned continuous boundary values $\Phi(\theta)$, and whose imaginary part on the inner circle has the boundary values zero. If $q = \exp\left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \pi i\right) < 1$, he finds

$$F(z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \left\{ \zeta \left[\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) \middle| \omega_1, 2\omega_3 \right] - \zeta_3 \left[\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) \middle| \omega_1, 2\omega_3 \right] \right\} d\theta,$$

the half-periods of the elliptic functions $\zeta(u|\omega_1, 2\omega_3)$ and $\zeta_3(u|\omega_1, 2\omega_3)$ being ω_1 and $2\omega_3$. — The author emphasizes that the only essential means in deriving this result are Cauchy's integral formula and Schwarz's reflexion principle. S. Warschawski.

Manià, Basilio: Sopra un problema di Carleman. Math. Z. 42, 700—709 (1937).

Carleman a posé en 1926 un problème concernant l'équivalence de deux classes quasi-analytiques de fonctions. Sur les deux questions que comporte ce problème Mandelbrojt en a complètement résolu une, et a résolu la seconde question pour certaines classes de fonctions, notamment pour les séries de Fourier. L'A. de ce travail reprend les méthodes de Mandelbrojt telles quelles, et indique de nouvelles classes pour lesquelles on peut résoudre le problème de Carleman. Mandelbrojt.

Bruwier, L.: Sur les fonctions holomorphes d'une variable hypercomplexe. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 6, 172—177 (1937).

Rechnet man mit der hyperkomplexen Veränderlichen j wie mit Polynomen modulo $(1 + j^2)^p$, so ist jede holomorphe Funktion von $x + jy$ äquivalent mit einem System von p holomorphen Funktionen von $x + iy$. Hieraus folgen dann Analoga zum Liouvilleschen Satz u. dgl.

W. Feller (Stockholm).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

● **Cramér, Harald:** Random variables and probability distributions. (Cambridge tracts in math. a. math. phys. Edited by G. H. Hardy a. E. Cunningham. Nr. 36.) Cambridge univ. press 1937. 120 pag. 6/6.

Das Buch kann als eine Einführung in die moderne mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie betrachtet werden. Die Grundlagen werden in Übereinstimmung mit der Kolmogoroffschen Axiomatik, jedoch unter Beschränkung auf endlichdimensionale euklidische Räume dargelegt. Als Methode wird systematisch die Theorie der Fourier-transformierten (charakteristischen Funktionen) benutzt; zur Begründung und Verwendung dieser Methode werden jedoch zahlreiche sehr bemerkenswerte neue Hilfsmittel herangezogen. Den Hauptgegenstand bildet der „zentrale Grenzwertsatz“ (u. a. auch in seiner modernen Feller-Lévyschen Fassung) sowie die mit ihm verbundenen asymptotischen Entwicklungen, in deren Darlegung die wichtigen diesbezüglichen Untersuchungen des Verf. erstmalig systematisiert erscheinen. Auch den homogenen stochastischen Prozessen ist ein Abschnitt gewidmet, wobei sich Verf. auf den Fall endlicher Streuungen (Kolmogoroffsche Theorie) beschränkt und die allgemeine Theorie

von P. Lévy unbetrachtet läßt. — Die Darlegung ist sehr klar und eingehend, insbesondere für Anfänger gut geeignet. *A. Khintchine* (Moskau).

Lévy, Paul: Complément à un théorème sur la loi de Gauss. Bull. Sci. math., II. s. 61, 115—128 (1937).

An zwei verschiedenen Stellen hat Verf. früher seinem bekannten Satz über die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen des zentralen Grenzwertsatzes bei Summation unabhängiger zufälliger Größen zwei verschiedene Fassungen gegeben (vgl. dies. Zbl. 16, 170 und Notice sur les travaux scientifiques de P. Lévy Paris: Hermann 1935); beidemale bestand diese Bedingung in der relativen Kleinheit des zufallsmäßig größten der Summanden im Vergleich zur Summe selbst; dabei wurde jedoch einmal diese Summe als zufällige Größe aufgefaßt, und das andere Mal durch eine feste, ihre erwartungsmäßige Größenordnung charakterisierende Zahl ersetzt. Das Hauptziel der vorliegenden Abhandlung bildet nun der Nachweis, daß diese beiden Fassungen miteinander äquivalent sind. — Sehr bemerkenswert ist folgender Hilfsatz: Ist N die (zufallsmäßige) Anzahl der Realisationen eines Ereignisses in einer (endlichen oder unendlichen) Reihe von gegenseitig unabhängigen Versuchen, und ist $P(N=0) = e^{-\theta} > 0$, so ist für jede natürliche Zahl p

$$P(N > p) < e^{-\theta} \sum_{h=p+1}^{\infty} \frac{\theta^h}{h!},$$

und diese Schranke kann durch keine kleinere ersetzt werden. *A. Khintchine*.

Geiringer, Hilda: Sur les variables aléatoires arbitrairement liées (Convergence vers la loi de Poisson). C. R. Acad. Sci., Paris 204, 1856—1857 (1937).

E_1, \dots, E_n seien die möglichen Ereignisse, $p_{ijk} \dots$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintreffens von $E_i, E_j, E_k \dots$; schließlich sei S_n die Summe über alle $p_{i_1 \dots i_n}$ (mit $S_0 = 1$) und $P_n(m)$ die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von m Ereignissen unter den E_i . Es wird dann der (nach der Momentenmethode zu beweisende) Satz ausgesprochen: Wenn für $n \rightarrow \infty$ $S_k \rightarrow a^k/k!$ strebt, so $P_n(m) \rightarrow e^{-a} a^m/m!$. Dieses Resultat wird auch auf mehr Dimensionen übertragen mit Hilfe der Methode von Cramér und Wold [J. London Math. Soc. 11 (1936); dies. Zbl. 15, 168]. *Feller*.

Geiringer, Hilda: Sur des variables aléatoires arbitrairement liées. Cas de convergence vers la loi de Gauss. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 1914—1915 (1937).

Mit den Bezeichnungen des vorangehenden Referates wird eine Bedingung für die S_n angegeben, unter welcher die Momente von $P_n(m)$ gegen diejenigen der Normalverteilung streben. *W. Feller* (Stockholm).

Pitman, E. J. G.: The „closest” estimates of statistical parameters. Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 212—222 (1937).

The author proposes an analytic definition to displace the ambiguous “best” in estimating a statistical parameter. If θ is a parameter involved in a frequency function of known form, and if X_1 and X_2 are statistics (functions of the sample values which do not involve the unknown values of the parameters) and are “effective” estimates of θ , then X_1 is a “closer” estimate than X_2 , if for all values of the parameter, the probability that $|X_1 - \theta| < |X_2 - \theta|$ is greater than $\frac{1}{2}$. A closest statistic if existent, is one closer than any other statistic. For a chance variable with a unique median, this median is shown to be the closest estimate of the variable. The author shows that the classical estimate of the variance of the population, given by $S_2/(n-1)$, can be improved. Indeed S_2/k_{n-1} is the closest estimate where k_n is given approximately by $k_n = n - \frac{2}{3} + (0,09/n)$. The author obtains distributional characteristics of the “ $T(m)$ distribution” — the Pearsonian Type III curve, of the form $y = e^{-x} x^{m-1}/\Gamma(m)$. These results are applied to the locating and scaling of the exponential distribution, and of the rectangular distribution, closest estimates of the parameters being obtained in each case. The author mentions his coining of the term “squariance” as the analogue within a sample, of the variance.

Albert A. Bennett (Providence).

Jordan, Ch.: Sur l'approximation d'une fonction à plusieurs variables. Acta Litt. Sci. Szeged 8, 205—225 (1937).

Bestimmung der n -dimensionalen Gaußschen Verteilung mit vorgegebenen Momenten erster und zweiter Ordnung; Behandlung anderer zugehöriger Probleme und Spezialfälle.

Bruno de Finetti (Trieste).

Dodd, Edward L.: Internal and external means arising from the scaling of frequency functions. Ann. math. Statist. 8, 12—20 (1937).

The scaling of frequency distributions was discussed by R. A. Fisher in his paper on the mathematical foundations of theoretical statistics, from the standpoint of maximum likelihood. After noting that the usual likelihood criterion to be satisfied sometimes leads to a minimum likelihood, and sometimes to neither a maximum nor a minimum, the present paper contributes a study of scaling with special reference to the likelihood actually obtained, and to the nature of the means obtained, whether internal or external. Conditions are found under which a scale will be a mean. Under further restrictions, this mean will be internal — at least as regards absolute values. Under certain conditions, the existence of a scale is demonstrated. — For certain frequency functions, anomalies appear in that the scale given by the usual likelihood condition may be a scale for a minimum likelihood. Sometimes the value given by the usual likelihood criterion will yield neither a maximum nor a minimum. In certain simple cases, no scale exists. Among the Pearson Types there occur both functions which would be regarded as regular with respect to maximum likelihood and other functions that present anomalies.

H. L. Rietz (Iowa).

Wright, Sewall: The distribution of gene frequencies in populations. Science, New York 85, 504 (1937).

Numerische und graphische Methoden.

Friedrich, Konrad: Allgemeine für die Rechenpraxis geeignete Lösung für die Aufgaben der kleinsten Absolutsummen und der günstigsten Gewichtsverteilung. Z. Versuchswes. 66, 305—320 u. 337—358 (1937).

Es handelt sich um gleichzeitiges Kleinmachen von n linearen Ausdrücken

$$F_i = a_i x_1 + b_i x_2 + \dots + f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

in m ($< n$) Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_m (näherungsweise Auflösung der Gleichungen $F_i = 0$ nach den x_μ) gemäß der Forderung

$$\sum |F_i| = \min.$$

Mit dem Satz von Gauß, daß für die Lösung dieses Problems der „kleinsten Betragsumme“ m der Gleichungen genau erfüllt sein müssen, kann man die x_μ grundsätzlich durch Probieren mit endlich vielen Schritten finden. Verf. stellt sich nach einer historischen Einleitung die Aufgabe, ein Lösungsverfahren mit erträglichem Rechenaufwand auszuarbeiten. Sein Verfahren arbeitet mit schrittweiser Ersetzung der x_μ durch die veränderlichen F_i . In welcher Richtung in jedem Augenblick weiterzueliminieren ist, geben gewisse „Kennwerte“ an, die auch Erreichen des Minimums anzeigen. Das Verfahren wird an zahlreichen Beispielen erläutert. Es besitzt praktische Wichtigkeit, weil die Methode der kleinsten Quadrate bei der Bestimmung möglichst günstiger Gewichtsverteilung für bedingte Beobachtungen auf Ausgleichung nach kleinster Betragssumme führt.

Theodor Zech (Darmstadt).

Tiedeken, R.: Fortlaufende Rechnungen auf der Rechenmaschine. Z. Instrumentenkde 56, 466—468 (1936).

Ergänzungen zu F. Emde, Z. Instrumentenkde 56, 181—188 (1936), dies. Zbl. 3, 360, und R. Tiedeken, Z. Instrumentenkde 56, 15—26 (1936), dies. Zbl. 13, 73. Gegenüber der Emdeschen Arbeit werden einige besondere Hinweise für elektrische Rechenmaschinen gegeben, ferner ein vereinfachtes Verfahren zum Berechnen von

Differenzenreihen mittels Doppelwerkmaschinen. Zu seiner eigenen früheren Arbeit fügt der Verf. weitere an Rechenmaschinen zu stellende Grundforderungen hinzu

Theodor Zech (Darmstadt).

Poggi, Lorenzo: Una macchinetta per la risoluzione di sistemi di equazioni lineari e calcoli analoghi. Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz. **1**, 418—422 (1937).

Die Berechnung eines Ausdrucks $x = \sum a_m y_m$ wird so wie in einem früheren Aufsatz des Verf. (dies. Zbl. **16**, 318) ausgeführt, nur daß die Zahnräder und Zahnstangen entfallen. Für jede Gleichung des Systems muß eine derartige Vorrichtung vorhanden sein, die Drehwinkel, die derselben Unbekannten entsprechen, müssen durch Kopplung der Drehachsen stets einander gleichgehalten werden. Durch die den y entsprechenden Drehwinkel sind die Werte der verschiedenen x bestimmt und umgekehrt. Ob das Rechengesetz bereits tatsächlich ausgeführt wurde, wird nicht berichtet. Es folgen noch Weisungen für den Fall, daß die Anzahl der Unbekannten zu groß für das Gerät ist, und Betrachtungen über die Genauigkeit.

L. Schrutka (Wien).

Békésy, Georg v.: Über die photoelektrische Fourier-Analyse eines gegebenen Kurvenzuges. Elektr. Nachr.-Techn. **14**, 157—161 (1937).

Bei qualitativen Untersuchungen sind die üblichen Verfahren zur harmonischen Analyse (bes. Apparat und Rechenschema) oft zu schwerfällig. Verf. gibt ein photoelektrisches Verfahren an, das rasch und bequem arbeitet. Die zu analysierende Kurve $y = f(x)$ berandet ein weißes Papierstück, das auf schwarzen Untergrund gelegt wird. Mittels einer Zylinderlinse stellt man sich ein Lichtband her, dessen Intensitäten der Reihe nach die $f(x)$ -Werte wiedergeben (Aufzeichnung von $f(x)$ in „Intensitätsschrift“). Durch Abstandsregelung wird die Periode des Lichtbandes auf eine feste Länge gebracht. cos- und sin-Blenden schneiden aus dem Lichtband die Fourierkoeffizienten proportionale Lichtströme aus, die man durch die Kurzschlußströme eines Photoelements mißt. Jeder Fourierkoeffizient erfordert eine Blendenumschaltung und eine Strommessung. Mit Blenden auf einem Filmstreifen und photographischer Registrierung kann man das Verfahren vollautomatisch einrichten. *Zech*.

Blaess, Viktor: Zur angenäherten Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. VDI **81**, 587—596 (1937).

Zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung $\ddot{s} = f(t, s, \dot{s})$ wird ein Verfahren beschrieben, nach welchem bei jedem Schritt nach der Taylorsche Formel (Abbrechen nach dem dritten Glied) gerechnet und nach je fünf Schritten eine Verbesserung eingeschaltet wird. Das Verfahren ist auf Systeme von Differentialgleichungen und auf Differentialgleichungen höherer Ordnung übertragbar und kann auch graphisch-vektoriell durchgeführt werden. Es werden formelmäßige Anhaltspunkte für die Größe der einzelnen Schritte gegeben. Die Brauchbarkeit des Verfahrens und die Notwendigkeit der Verbesserungsrechnungen wird an zahlreichen Beispielen (waagrechtes Fadenpendel mit konstanter und mit zeitlich veränderlicher Federung, körnige Stoffe im Flüssigkeitsstrom, auch bei örtlich veränderlicher Strömungsgeschwindigkeit, Luft-Falldämpfung, ebene Bewegung von Massenpunkten und Verteilerscheibe) gezeigt.

Collatz (Karlsruhe).

Barta, J.: Über die näherungsweise Lösung einiger zweidimensionaler Elastizitätsaufgaben. Z. angew. Math. Mech. **17**, 184—185 (1937).

Verf. wendet das bekannte Verfahren (vgl. z. B. E. Trefftz, Verhandl. Kongreß Zürich 1926, 132), für die genaue Lösung eines Randwertproblems Annäherungsausdrücke aufzustellen, die die Differentialgleichung exakt und die Randbedingungen nach und nach approximieren, an auf die Verdrehung eines Stabes von quadratischem Querschnitt, auf die Durchbiegung einer eingespannten quadratischen Platte mit gleichmäßig verteilter Last und eine solche Platte mit einer Einzellast in der Mitte. Die zahlenmäßig durchgeführte Rechnung zeigt bei relativ geringem Rechenaufwand Ergebnisse mit einer für praktische Zwecke durchaus genügenden Genauigkeit. *Collatz*.

Geometrie.

● **Laleseo, Trajan:** La géométrie du triangle. La géométrie d'Euler. La géométrie récente. Les théories générales. La métrique du triangle. 2. édit. Avec une lettre de Émile Picard et une préface de Georges Tzitzéica. (Ann. roum. de Math. cahier 1.) Paris: Libr. Vuibert 1937. 120 pag.

„Les propriétés, dont quelques unes appartiennent à l'auteur, sont bien mises en évidence et leurs démonstrations sont simples, claires et souvent élégantes“ (Préface de G. Tzitzéica). I. Le cercle des neuf points, la droite de Simson, le théorème de Feuerbach. II. Théorèmes de Céva et de Ménélaus, points de Gergonne et de Nagel, théorème de Désargues, points isotomiques, le point de Lemoine, points isogonaux, les points et le cercle de Brocard, les cercles de Tucker. III. Deux figures égales, deux figures semblables, trois figures directement semblables. IV. Relations angulaires, relations entre angles et côtés, angle de Brocard. *O. Bottema.*

Baron, Heinrich: Eine Erweiterung des Satzes von Desargues. Mh. Math. Phys. 45, 335—337 (1937).

Bringt man bei beliebiger Zuordnung zweier ebener n -Ecke die entsprechenden Seiten zum Schnitt und verbindet die entsprechenden Ecken, so ist das Produkt der Teilverhältnisse der Seiten des einen reziprok zum Produkt der Sinusteilverhältnisse der Außenwinkel des anderen. Sonderfälle: die Sätze von Desargues, Menelaos, de Ceva usw. *O. Bottema* (Deventer, Holl.).

Kasner, Edward: Fundamental theorems of trihornometry. Science 85, 480—482 (1937).

A horn angle is the figure formed by two curves having a common tangent at a common point. The unique conformal invariant is $M_{12} = \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)^2}{\frac{d\gamma_2}{ds_2} - \frac{d\gamma_1}{ds_1}} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{y_2 - y_1}$,

where γ represents curvature. The horn angle is represented in an auxiliary plane by two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) ; M_{12} is their "distance". A trihorn is formed, when three curves have a common tangent at a common point; it is represented by a triangle, has three measures M_{ij} and three "angles" α_{ij} , defined as $\alpha_{12} = \frac{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3)}{(x_2 - x_3)(y_1 - y_3)}$ etc. The author gives (without proofs) a great number of theorems on trihornometry; some are analogous to theorems in ordinary geometry and some are strikingly different. The congruence group in the new metric is $X = mx + h$, $Y = m^2y + k$. *O. Bottema.*

Kasner, Edward: Trihornometry: A new chapter of conformal geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 337—341 (1937).

Sei x_i bzw. y_i die Krümmung bzw. deren Ableitung nach dem Bogen einer Kurve φ_i . 3 Kurven φ_i , welche im gemeinsamen Punkte nur gemeinsame Tangente haben, besitzen 6 Konforminvarianten

$$M_{ij} \equiv -M_{ji} = \frac{(x_j - x_i)^2}{y_j - y_i}, \quad \alpha_{ij} \equiv \frac{1}{\alpha_{ji}} = \frac{(y_i - y_k)(x_j - x_k)}{(x_i - x_k)(y_j - y_k)}.$$

M_{ij} bzw. α_{ij} sind Analoga zu den Seiten bzw. Winkeln der Trigonometrie. Der Verf. gibt hauptsächlich (und zwar ohne Beweis) an, wie man aus 3 von diesen 6 Invarianten die übrigen berechnet. *Hlavatý* (Praha).

Krames, Josef: Über Fußpunktkurven von Regelflächen und eine besondere Klasse von Raumbewegungen. (Über symmetrische Schrotungen I.) Mh. Math. Phys. 45, 394—406 (1937).

Der Aufsatz eröffnet eine Reihe von Arbeiten des Verf. über die von ihm als symmetrische Schrotungen bezeichneten Bewegungen im Raum. Darunter werden Bewegungen verstanden, bei denen die Lagen des bewegten Systems durch die Spiegelungen des festen Systems an den Erzeugenden einer Regelfläche Γ erhalten werden.

Ersichtlich liegt ein Analogon zur symmetrischen Rollung in der Ebene vor, bei der die beiden Polkurven stets zur gemeinsamen Tangente symmetrisch liegen. — Die Zentraltangentenfläche ζ von Γ ist die feste Achsenfläche der Bewegung; die auf ζ schrotende Achsenfläche ζ_s ist die Zentraltangentenfläche jener mitbewegten Regel­fläche Γ_s , deren Lagen aus Γ durch die Spiegelungen an den Erzeugenden von Γ erhalten werden. — Es werden Sonderfälle dieser Bewegungen hervorgehoben, darunter auch bekannte Bewegungen wie die kubischen Kreisbewegungen, deren eingehende Behandlung späteren Arbeiten vorbehalten bleibt. Die Bahnkurven einer symmetrischen Schrotung gehen aus den Fußpunktkurven von Γ durch zentrische Verdopplung aus den bezüglichlichen Polen hervor, woraus sich Aussagen und Konstruktionen über Tangenten und Krümmungseigenschaften ergeben. *E. Kruppa* (Wien).

Krames, Josef: Zur Bricardschen Bewegung, deren sämtliche Bahnkurven auf Kugeln liegen. (Über symmetrische Schrotungen II.) *Mh. Math. Phys.* **45**, 407—417 (1937).

Im Schrifttum sind zahlreiche Arbeiten (Darboux, Borel, Bricard, Duporcq u. a.) vorhanden, die sich mit solchen Bewegungen im Raum beschäftigen, unter deren Bahnkurven sphärische enthalten sind. R. Bricard hat gezeigt, daß es nur eine einzige (nichttriviale) Art von Bewegungen gibt, bei denen alle Punkte sphärische Bahnkurven besitzen. — Der Verf. zeigt, daß diese Bricardsche Bewegung ein Sonderfall einer symmetrischen Schrotung (s. den voranstehenden Bericht) ist und erhalten wird, indem man ein gerades Kugelkonoid als Grundfläche der symmetrischen Schrotung wählt. Untersucht wird weiter die kubische Verwandtschaft, die bei dieser Bewegung in jedem Augenblick zwischen den Punkten des bewegten Systems und den Mitten der Trägerkugeln ihrer Bahnkurven besteht. — Für symmetrische Schrotungen, bei denen diskrete, ∞^1 oder ∞^2 sphärische Bahnkurven vorkommen, bilden in jedem Augenblick die auf ihnen laufenden Punkte eine Menge, die zur Menge der Mitten der Trägerkugeln dieser Bahnkurven gleichsinnig kongruent ist. Zahlreiche andere Bemerkungen stellen den Anschluß an die Arbeiten der obengenannten Geometer her. *E. Kruppa* (Wien).

Weiss, E. A.: Die Euklidische Geraden-Kugel-Transformation als Gegenstand der Punktreihen­geometrie. *Deutsche Math.* **2**, 285—293 (1937).

Verf. bildet die Punktreihen des R_3 auf die Punkte des R_7 ab, wo die singulären Punktreihen, d. h. die bezifferten Punkte, in die Punkte einer Segreschen Mannigfaltigkeit M_4^4 dieses R_7 übergehen. Nach Auszeichnung eines bestimmten bezifferten Kegelschnitts im R_3 als absoluten Kegelschnitts, dessen Bild auf der M_4 eine C^3 ist, die alle erzeugenden Räume trifft, kann man auch von einer Abbildung aller Minimal­linienelemente des R_3 auf die Punkte der M_4 sprechen. Darauf wird die M_4 von dem \bar{R}_3 , in dem C^3 liegt, auf einen R_3 projiziert, wodurch die erzeugenden Ebenen der M_4 in die Ebenen eines Büschels und die erzeugenden Geraden in die eines allgemeinen linearen Komplexes übergehen. Diese Projektion erzeugt nun die euklidische Geraden-Kugeltransformation. Denn ein beliebiger R_5 schneidet das Bild einer Kugel als Gesamtheit ihrer bezifferten Minimalgeraden auf M_4 aus und bestimmt andererseits eine allgemeine Gerade des Bildraumes, wobei 2 entgegengesetzt orientierte Kugeln in 2 bez. des Komplexes nullpolare Geraden übergehen. Im letzten Paragraph wird noch gezeigt, wie die Eulersche Transformation, ein vom Verf. früher (*Mh. Math. Phys.* **44**; dies. Zbl. **15**, 75) behandelter Ausartungsfall, herauskommt, wenn die C^3 in eine Gerade und Kegelschnitt zerfällt. Der lineare Komplex ist in diesem Falle singulär. *Burau* (Hamburg).

Szekeres, G.: On a problem of the lattice-plane. *J. London Math. Soc.* **12**, 88—93 (1937).

In der Gitterebene werden Parallelogramme vom Flächeninhalt Δ betrachtet, deren Mittelpunkt O ein Gitterpunkt ist, deren Seitenrichtungen gegeben sind und die im Innern keine Gitterpunkte außer O enthalten. Wie groß kann der Flächen-

inhalt Δ sein, damit solche gitterpunktfreien Parallelogramme bei allen vorgegebenen Richtungen existieren? Als scharfe Schranke ergibt sich $\Delta = 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. *Hofreiter*.

Kolman, E.: Über die Zerlegung der Kreisfläche. *Rec. math. Moscou*, N. s. 2, 65—76 u. dtsch. Zusammenfassung 77 (1937) [Russisch].

Eine topologische Kreisfläche wird durch Schnitte dreierlei verschiedener Typen (konzentrische Kreise, berührende Kreise, Strecken) in Stücke zerlegt. Mit Hilfe von kombinatorischen Methoden wird für die beiden ersten Typen eine Klassifizierung der Zerlegungen gegeben; es werden rekurrente Formeln und Algorithmen für die Anzahl der möglichen Varianten aufgestellt, Tabellen der numerischen Werte berechnet.

W. Nowacki (Bern).

Markič, Michel: Transformantes. *Nouveau véhicule mathématique. Synthèse des triquaternions de Combebiac et du système géométrique de Grassmann. Calcul des quadri-quaternions*. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, III. s. 28, 103—148 (1936).

Verf. arbeitet mit den Matrizeinheiten e_{ik} einer linearen Transformationsmatrix von 2, 3 und 4 Zeilen und den Elementen des hieraus gebildeten Ringes, die er „transformantes“ nennt. Gleichzeitig aber werden auch im Transformationsgebiet, Ebene oder Raum, Punkte und Vektoren nach Art von Grassmann oder Hamilton in komplexen Einheiten mit einem Index e_i geschrieben. Im Gebiet der e_{ik} werden isomorphe Größen zu den als Quaternioneneinheiten aufgefaßten e_i angegeben. Die Arbeit enthält dann im wesentlichen die Angabe gewisser Erweiterungsgruppen (von 8, 24 und 36 Elementen) der Quaternionengruppe und deren Darstellungen in den e_{ik} nebst den zugehörigen Gruppentafeln. Geometrisch sind dies gewisse Gruppen von endlich vielen Spiegelungen und Drehungen in der Ebene und im Raum. Als besonders wichtig erweist sich die zum Schluß behandelte Gruppe von 32 Elementen, die dem vom Verf. einzuführenden System von Quadriquaternionen zugrunde zu legen ist. Sie stellt sich in der Grassmannsymbolik dar als Gruppe der aus den 4 Einheiten gebildeten Produktgrößen und gewisser Summen hieraus, was sich geometrisch einfach in der Sprache polarer, axialer Vektoren und der zugehörigen Skalare ausdrücken läßt. *Burau*.

Analytische und algebraische Geometrie:

● **Lemaire, J.:** Exercices de géométrie moderne à l'usage des élèves de mathématiques spéciales et des candidats à l'agrégation. Paris: Libr. Vuibert 1937. VI, 169 pag. Fres. 30.—.

Das Buch stellt in 92 Nummern eine Sammlung von Aufgaben mit Lösungen dar aus der Theorie der Kegelschnitte, Flächen 2. Grades, Raumkurven 3. und 4. Grades und damit zusammenhängender geometrischer Örter. Die Aufgaben, die sich im Rahmen eines Referats in ihrer Reichhaltigkeit nicht wiedergeben lassen, behandeln z. B. die Steinersche Hypozykloide, die Strophoide, den Direktorkreis eines Kegelschnitts sowie zahlreiche Brennpunkts- und Polaritätseigenschaften von Kegelschnitten. Die räumlichen Aufgaben befassen sich etwa mit Projektionseigenschaften kubischer und biquadratischer Raumkurven und dem Normalenkomplex einer Quadrik. Die letzte Nummer behandelt die kubische Fläche als geometrischen Ort der Sehnenmitten einer kubischen Raumkurve. Die Lösung der Probleme geschieht in überraschend kurzer und eleganter Weise meist auf synthetischem Wege. Eine Gliederung des Stoffes in Kapitel würde die Benutzung des Werkes wesentlich erleichtern. *Burau* (Hamburg).

Grosheide, Gerhardus Hendrik Adriaan: Ebene Punkt-Gerade-Figuren bestimmt durch Invariantenwerte. Amsterdam: Diss. 1937. 109 S. [Holländisch].

Für die Figur, die gebildet wird von den m Hyperoskulationspunkten und den zugehörigen Tangenten einer algebraischen Kurve n -ter Ordnung müssen gewisse absolute Invarianten gegebene Werte besitzen. Verf. untersucht darum das Problem der Konstruktion von gewissen aus Punkten und Geraden bestehenden Figuren, wofür gewisse Invarianten vorgegebene Werte haben. Er führt den Begriff ein des „Stempel-

wertes eines nichtentarteten Elementetripels“. Dieses Tripel besteht aus den reellen Geraden $(a'x) = 0$, $(b'x) = 0$, $(c'x) = 0$ und den reellen Punkten $(u'A) = 0$, $(u'B) = 0$, $(u'C) = 0$, wofür $(a'A) = 0$, $(a'B) \neq 0$, $(a'C) \neq 0$, $(b'A) \neq 0$, $(b'B) = 0$, $(b'C) \neq 0$, $(c'A) \neq 0$, $(c'B) \neq 0$, $(c'C) = 0$. Der Stempelwert λ_{abc} ist $-\frac{(a'B)(b'C)(c'A)}{(a'C)(c'B)(b'A)}$. Wenn die Stempelwerte eines nichtentarteten Elementequadrupels oder eines derartigen Elementequintupels vorgegeben sind (sie müssen den Bedingungen $\lambda_{abc} = \frac{1}{\lambda_{acb}}$, $\lambda_{abc}\lambda_{acd} = \lambda_{abd}\lambda_{bcd}$ genügen), so gibt es im allgemeinen ∞^1 projektiv verschiedene Figuren. Ein nichtentartetes Elemente- m -Tupel ($m \geq 6$) ist im allgemeinen durch seine Stempelwerte (wofür es noch andere Bedingungen als die genannten gibt) vollkommen bestimmt. Auch werden komplexe Werte von reell vorstellbaren Elemente- m -Tupeln betrachtet. Besitzt eine Kurve n -ter Ordnung $m > 2$ Hyperoskulationspunkte, so bilden diese mit den zugehörigen Tangenten ein nichtentartetes Elemente- m -Tupel, wofür die Stempelwerte die n -ten Wurzeln der Einheit sind. Hat eine Kurve n -ter Ordnung q gerichtete (d. i. konkurrente) n -punktige Tangenten, so sind die zugehörigen q Berührungspunkte kollinear. Wenn es möglich ist, auf jeder von m Geraden einen Punkt derartig zu bestimmen, daß ein nichtentartetes m -Tupel gebildet wird, wofür alle Stempelwerte die n -ten Wurzeln der Einheit sind, weil überdies die Punkte auf gerichteten Geraden selbst gerichtet (d. i. kollinear) sind, so gibt es mindestens eine Kurve n -ter Ordnung, die in diesen Punkten die m Geraden n -punktig berührt. Darauf liegen m und nicht mehr als m Hyperoskulationspunkte, wenn die Berührungspunkte einfache Punkte der Kurve sind und nicht einen $(m+1)$ -ten Hyperoskulationspunkt verursachen. Für gewisse Fälle werden die Gleichungen der (reellen) Kurven bestimmt; wenn man $n = 4$ substituiert, bekommt man die Gleichungen von Kurven vierter Ordnung mit 1, 2, 3, 4, 5, 8 und 12 Undulationspunkten. Verf. gibt eine theoretische Methode für die Untersuchung, ob es Kurven mit anderen Zahlen ≤ 12 gibt. Hierbei sind Eigenschaften zu beachten wie die folgende: Eine reelle Kurve vierter Ordnung, die außer 4 gerichteten Undulationspunkten noch 2 reelle Undulationspunkte besitzt, hat entweder mindestens 8 oder 12 Undulationspunkte. G. Schaaake (Groningen).

Müller, Richard, und Ulrich Graf: Über besondere rationale Raumkurven sechster Ordnung. *Mh. Math. Phys.* 45, 338—342 (1937).

Verff. zeigen, daß die Raumkurven sechster Ordnung f^6 , die einen dreifachen Punkt besitzen und mit dem uneigentlichen Kugelkreise sechs Punkte gemein haben, die Fußpunktkurven der kubischen Ebenengewinde sind und auch konstruktiv erfaßt werden können als die Kurven, die man durch Inversion der kubischen Raumkurven erhalten kann. Zum Schluß geben sie die analytische Darstellung der Kurven f^6 . G. Schaaake (Groningen).

Gherardelli, Giuseppe: Un'osservazione sulle corrispondenze simmetriche a valenza positiva o nulla. *Boll. Un. Mat. Ital.* 16, 134—135 (1937).

Una corrispondenza simmetrica a valenza $\gamma \geq 0$ sopra una curva algebrica è ordinaria o nulla; nel primo caso γ è pari, nel secondo γ è dispari e la dimensione $r \geq \gamma$ anche dispari. Autoreferat.

Seifert, Ladislav: Contributions à la théorie polaire d'une variété cubique dans l'espace à quatre dimensions. I. *Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk* Nr 233, 1—15 (1937).
Seifert, Ladislav: Contributions à la théorie polaire d'une variété cubique dans l'espace à quatre dimensions. II. *Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk* Nr 235, 1—9 (1937).

Dans la première partie du mémoire (§§ 1—9) l'a. étudie les variétés polaires de deux points, deux droites (une droite), un plan et une droite, etc. par rapport à une variété cubique V^3 située dans un espace à 4 dimensions. La variété polaire de deux droites est un hypercône, la variété polaire de deux plans une hypersurface cubique à 6 points doubles. L'a. trouve des propriétés de la jacobienne d'une congruence linéaire d'hyperquadrriques, variétés polaires des points d'un plan ϱ , et il

expose des résultats intéressants dans les cas où le plan ϱ a une position particulière par rapport à la courbe double de la variété hessienne de V_3^3 . Dans la deuxième partie (§§ 10—14) on trouve des recherches analogues sur la variété polaire du degré 4 de deux espaces linéaires à 3 dimensions, sur les surfaces jacobienues, la hessienne et sa courbe double.

Fr. Fabricius-Bjerre (Copenhague).

Baker, H. F.: On the determination of a simplex both inscribed to and circumscribed about a quadric in space of four dimensions. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. 16, 35—38 (1937).

B. Segre (*Atti Accad. naz. Lincei, Mem.* 1927, 204) hat die Konstruktion eines Simplex angegeben, das einer Quadrik eines Raumes S_4 gleichzeitig ein- und umgeschrieben ist: Vier Ecke des Simplex sind den beiden Bedingungen unterworfen, daß sie in einer Tangentialhyperebene der Quadrik liegen, so daß ihre Verbindungsgeraden mit dem Berührungspunkt P jener Hyperebene eine äquianharmonische Gruppe bilden (auf dem Kegel der Geraden der Quadrik, die von P ausgehen); nach der Wahl jener vier Ecken ist das Simplex bestimmt. Verf., der sich mit solchen Simplexen in einem beliebigen Raume S_r schon beschäftigt hatte [*Proc. London Math. Soc.* 9, 193 (1911)], beweist hier, daß die von ihm angegebenen zur Existenz des gesuchten Simplex nötigen analytischen Bedingungen das Ergebnis von B. Segre zur Folge haben.

E. G. Togliatti (Genova).

Rozet, O.: Sur deux surfaces hyperabéliennes. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 6, 167—172 (1937).

Dans ce travail l'A. envisage les surfaces du quatrième ordre — déjà rencontrées par G. Humbert [*C. R. Acad. Sci., Paris* 129, 667 (1899)] — représentées en coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 par les équations

$$(x_1 x_3 + x_3 x_4)(x_1 x_4 - x_2 x_3) - (x_1 x_3 + x_2 x_4)(x_1 x_2 - x_3 x_4) = 0$$

$$\text{et} \quad x_1^2(x_2^2 + x_3^2) - (x_2^2 - x_4^2)(x_3^2 - x_4^2) = 0,$$

surfaces qui sont respectivement transformées en elles-mêmes par les transformations birationnelles involutives

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = 1/x_1 : 1/x_2 : 1/x_3 : 1/x_4$$

$$\text{et} \quad x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 x_2 x_3 : x_3 x_4^2 : x_2 x_4^2 : x_2 x_3 x_4,$$

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 x_2 x_3 : x_2 x_4^2 : x_3 x_4^2 : x_2 x_3 x_4;$$

il étudie particulièrement les congruences engendrées par les droites joignant les couples de points de ces surfaces, associées dans les correspondantes involutions d'ordre deux.

Beniamino Segre (Bologna).

Godeaux, Lucien: Sur une variété algébrique à trois dimensions de bigenre un. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 23, 93—101 (1937).

Eine Involution zweiter Ordnung mit nur endlich vielen Doppelpunkten auf einer regulären dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, auf welcher jede lineare Schar ihre eigene Adjungierte ist, besitzt 16 Doppelpunkte. Auf der Bildmannigfaltigkeit einer solchen Involution ist jede lineare Schar verschieden von ihrer Adjungierten, aber identisch mit der zweiten Adjungierten. Ein Beispiel einer solchen Bildmannigfaltigkeit, mit $P_g = 0$, $P_2 = 1$, $P_3 = 0$, $P_4 = 1$ usw., wird angegeben.

van der Waerden.

Godeaux, Lucien: Une variété algébrique à trois dimensions sur laquelle l'opération d'adjonction a la période trois. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 23, 335—342 (1936).

Ein Beispiel einer Mannigfaltigkeit mit der im Titel erwähnten Eigenschaft wird konstruiert als Bildmannigfaltigkeit einer zyklischen Involution dritter Ordnung auf einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, auf der jede lineare Schar ihre eigene Adjungierte ist.

van der Waerden (Leipzig).

Villa, Mario: Alcune osservazioni sugli enti iperalgebrici. Le varietà antivolutive. *Boll. Un. Mat. Ital.* 16, 61—68 (1937).

Dans ce travail l'A. énonce certaines propriétés des variétés antinvolutives d'un S_r

projectif complexe, c'est-à-dire des variétés — classifiées en deux espèces — admettant une antiprojectivité (non-dégénérée) involutive en soi-mêmes (et qui, par conséquent, comprennent en particulier les variétés réelles), avec égard spécial au cas des courbes planes algébriques antinvolutives, pour lesquelles il assigne une simple génération projective. Les démonstrations paraîtront ailleurs. *Beniamino Segre* (Bologna).

Longhi, Ambrogio: *I sistemi simmetrici di specie superiore in un campo binario.* Scritti mat. off. a Luigi Berzolari 643—676 (1936).

A symmetrical system J_n^{r-1} of degree n and type $r-1$ is a symmetrical correspondence between the elements of a rational singly infinite family which associates with $r-1$ generic elements of the family a determinate set of n other elements. Any one of these, together with the $r-1$ given elements, is said to form an r -ple of corresponding elements of J_n^{r-1} . Such a system is defined by an equation of the form $\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) = 0$, where Φ is a polynomial symmetric in $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$, and of degree n in each variable. It is assumed that Φ is not divisible by a factor of the form $\xi_i - \xi_k$. The author proves various enumerative results concerning the number of united elements and branch elements of the correspondence, and concerning the algebraic series described by the ∞^{r-1} sets of n elements corresponding to the various choices of the $r-1$ given elements. A symmetric correspondence J_m^{r-1} is obtained on a rational curve C_m in S_t by associating with a set of $r-1$ points of C_m the intersections of the curve with the mixed polar hyperplane of these points with respect to a hypersurface of order r . In particular, on a rational normal curve C_n in S_n , any J_v^{r-1} with $v < n$ can be obtained in this way by choosing for the hypersurface a cone whose vertex meets C_n in $n-v$ points. Similar results are proved for symmetric systems defined on a rational curve by a linear complex of S_{r-1} . Some concise analytical forms for the equations of symmetric systems are given; and finally the cyclic systems are examined, i.e. those systems in which the set of n points together with the $r-1$ given points moves in a linear series on the underlying rational construct. *J. A. Todd*.

Differentialgeometrie:

Weatherburn, C. E.: *On certain useful vectors in differential geometry.* *Compositio Math.* 4, 342—345 (1937).

Verf. bemerkt, daß viele wichtige Formeln der Flächentheorie einfachere Gestalt annehmen, wenn man neben den Vektoren $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \mathbf{n}$, wo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ den Ortsvektor und \mathbf{n} den Normaleneinheitsvektor bezeichnen, das zu diesem reziproke Vektortripel $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{n}$ einführt.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Rangachariar, V.: *On three orthogonal congruences of curves.* *J. Indian Math. Soc.*, N. s. 2, 216—219 (1937).

Gegeben ist ein Orthogonaltripel von Kurvenkongruenzen mit den Tangentialvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Für die Ausdrücke $M_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \left(\frac{d\mathbf{b}}{ds_1}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \right)$ und $T_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \left(\frac{d\mathbf{b}}{ds_1}, \mathbf{a} \right)$, die „moment“ und „tendency“ genannt werden, leitet der Verf. die Beziehungen $M_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = M_{\mathbf{c}, \mathbf{b}}$ her sowie einen Ausdruck für $M_{\mathbf{b}, \mathbf{t}}$, wenn \mathbf{t} ein beliebiger Normalvektor zu \mathbf{b} ist.

Bureau (Hamburg).

Rozet, O.: *Sur les réseaux à invariants égaux.* *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 23, 226—230 (1937).

Soit (x) une surface qui porte un réseau (u, v) à invariants ponctuels égaux, $(x_1), (x_{-1})$ les deux transformées de Laplace de (x) et Γ la conique de Koenigs-Darboux située dans le plan tangent de (x) et qui a un contact du 2^d ordre avec la courbe u de (x_1) en x_1 et avec la courbe v de (x_{-1}) en x_{-1} . L'auteur considère la congruence (Γ) de Γ . Les foyers en sont indéterminés pour certaines surfaces de Darboux (Théorie des surfaces 3, 474—477) dont (x_{-1}) , par exemple, est une quadrique qui porte toutes les Γ . Ce cas exclus, quatre foyers de Γ se confondent avec x_1, x_{-1} ,

deux autres y_1, y_2 déterminent la droite $y_1 y_2$ dont le pôle est y . Si le réseau (x) est quadratique y, x_2 et x_{-2} décrivent des réseaux à invariants égaux. *S. Finikoff*.

Foster, Malcolm: A theorem on mean ruled surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 423—424 (1937).

Soit S une surface arbitraire, C une courbe sur S , R la surface réglée lieu des normales de S le long de C et C_1 la ligne de striction de R . L'auteur considère les surfaces R dont le segment de la génératrice entre C et G est égal à la courbure moyenne de S . Les lignes C qui les déterminent, coïncident avec celles qui correspondent aux surfaces réglées principales de la congruence de Ribaucour attachée à S . *Finikoff*.

Slebozinski, W.: Sur une classe de surfaces de l'espace affine. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 1701—1703 (1937).

Fortsetzung einer Arbeit desselben Verf. (vgl. dies. Zbl. **16**, 275): Die Flächen, welche mit einer A_2 äquivalent sind (und zwar im Sinne der obenerwähnten Arbeit), werden hier in bezug auf die Form $R_{ij} du^i dv^j$ untersucht, wo R_{ij} der verjüngerte Krümmungstensor ist. Die entsprechenden Konnexionskoeffizienten und somit auch die eben erwähnte Form lassen sich mit Hilfe einer einzigen Funktion beschreiben. Falls die asymptotischen Kurven reell (imaginär) sind, kann die untersuchte Form in asymptotischen Parametern nur drei Ausdrucksweisen haben. Alle sechs Fälle werden vom Verf. (ohne Beweis) angegeben. *Hlavaty (Praha)*.

Süss, Wilhelm: Über Affinminimallflächen, die gleichzeitig Minimalflächen sind. Math. Z. **42**, 697—699 (1937).

L'auteur démontre la proposition de Thomsen (Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **2**, 71—73): une surface minimale S est en même temps minimale-affine si la représentation sphérique des asymptotiques en est un réseau orthogonal des cercles. Il considère S comme surfaces minimales-relatives par rapport à son image de courbure affine Σ d'où suit la propriété caractéristique, à savoir: le réseau des lignes de courbure de Σ correspond aux asymptotiques de S . *S. Finikoff (Moscou)*.

Popa, I.: Geometria proiettivo-differenziale delle singolarità delle curve piane. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **25**, 220—222 (1937).

L'A. considère une courbe plane C ayant en O un point de rebroussement, ou flecnodal, ou biflecnodal, et — en se servant de courbes d'ordre 2, 3 ou 4 osculatrices en O à C — il détermine intrinsèquement un repère projectif et certaines directions sortant du point O , ne dépendant que du voisinage de O sur C . Ces résultats peuvent être employés dans la géométrie projective-différentielle des surfaces. *Segre*.

Levine, Jack: On a class of metric spaces admitting simply transitive groups of motions. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **16**, 49—59 (1937).

Ausgehend von dem metrischen Tensor

$$G_{ij} = e_i \delta_j^i H_i^2, \quad (e_i = \pm 1) \quad (1)$$

bekommt man leicht die Gleichung

$$\frac{\partial H_i}{\partial x^h} = a_{ih} H_i H_h. \quad (a_{ih} = e_i \gamma_{hii}) \quad (2)$$

Im ersten Teil löst der Verf. das System (2) unter Voraussetzung, daß alle a_{ih} konstant sind. Die Lösung gestaltet sich je nach der Struktur des Konstantensystems a_{ih} , und alle möglichen Fälle werden vom Verf. erschöpft. — Der obenerwähnte Raum läßt eine einfach transitive Bewegungsgruppe mit den Vektoren ξ_h^i zu. Sind λ_h^i die Tangentialvektoren der normalen Kongruenzen, welche zu den in (2) erwähnten (konstanten) Koeffizienten γ_{hij} führen, so ist $\lambda_h^i = \delta_h^i / H_i$. Aus dieser Gleichung und aus der Bedingung

$$\sum_i \left(\xi_h^i \frac{\partial}{\partial x^i} \lambda_k^j - \lambda_k^i \frac{\partial}{\partial x^i} \xi_h^j \right) = 0 \quad (3)$$

lassen sich dann die Vektoren ξ_h^i in allen obenerwähnten Fällen berechnen. *Hlavaty*.

De Mira Fernandes, A.: Un aspetto formale della derivazione tensorale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 309—311 (1937).

Formale Konsequenzen des wohlbekannten Überganges von holonomen zu den nichtholonomen Koordinaten bei kovarianter Ableitung. *Hlavatý* (Prag).

Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konvexes und Verwandtes:

Alt, F.: Dreiecksungleichung und Eichkörper in verallgemeinerten Minkowskischen Räumen. Erg. math. Kolloqu. H. 8, 32—33 (1937).

Die Verallgemeinerung der Minkowskischen Geometrie besteht darin, daß auch unbeschränkte oder sich durchs Unendliche hindurch erstreckende Eichkörper in Betracht gezogen werden. M. a. W., es wird auf die Positivität der Metrik verzichtet. Verf. zeigt, daß für das Bestehen der Dreiecksungleichung notwendig und hinreichend ist, daß der Eichkörper projektiv konvex, d. h. durch eine Kollineation in einen (nicht notwendig beschränkten) konvexen Bereich überführbar ist. *W. Fenchel*.

Vincensini, Paul: Sur la reconstitution de l'ensemble des corps convexes de l'espace à n dimensions à partir de certains sous-ensembles bases. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 1609—1611 (1937).

Es bezeichne (γ) die Menge aller konvexen Körper des n -dimensionalen Raumes, die einen Mittelpunkt besitzen. Ferner sei D_0 ein beliebiger, aber fest gewählter Körper aus (γ) und $(e)_{D_0}$ die Menge derjenigen konvexen Körper, deren Vektorenkörper D_0 ist. Verf. zeigt mit Hilfe früherer Ergebnisse über Fortsetzbarkeit von Linearscharen (vgl. dies. Zbl. 12, 272), daß jeder konvexe Körper aus Körpern von (γ) und $(e)_{D_0}$ linear kombiniert werden kann. Von sämtlichen Körpern wird hierbei angenommen, daß ihre Berandungen endliche und nichtverschwindende Hauptkrümmungsradien besitzen. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Berwald, L., und O. Varga: Integralgeometrie. XXIV. Über die Schiebungen im Raum. Math. Z. 42, 710—736 (1937).

Die Integralgeometrie beschäftigt sich mit der Bestimmung von Mittelwerten. Hat man z. B. eine Fläche und eine Ebene, so kann man die Länge der Schnittkurven über alle Lagen der Ebenen mitteln. Es ergibt sich die Oberfläche O der Fläche. In der zu referierenden Arbeit wird gemittelt nur über alle die Lagen der Ebene, die sich durch Parallelverschiebung aus der Anfangslage ergeben. Als mittlere Schnittkurvenlänge ergibt sich so $\int |\sin \sigma| dO$, wobei σ der Winkel der Flächen- und Ebenennormalen bedeutet. Die mittlere Schnittpunktzahl einer verschiebbaren Ebene mit einer Kurve beträgt $\int |\cos \omega| ds$, wobei ω der Winkel zwischen Kurve und Ebenennormalen ist. Entsprechend erhält man für die mittlere Anzahl der Schnittpunkte einer Fläche mit einer verschiebbaren Geraden den Ausdruck $\int |\cos \omega| dO$. Die Geraden bzw. Ebenen in diesen Formeln können auch durch Kurven oder Flächen ersetzt werden. — Es sei im Raume ein festes Gebiet \mathcal{G}_1 und ein verschiebbares \mathcal{G}_2 gegeben. Die Gesamtkrümmung ihrer Ränder sei C_1 bzw. C_2 , ihr Rauminhalt sei V_1 bzw. V_2 . Mittelt man die Gesamtkrümmung des Randes des Durchschnittes beider Gebiete, so ergibt sich

$$C_1 V_2 + 12\pi H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) + 12\pi H(\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1) + C_2 V_1,$$

wobei die H gewisse Integralausdrücke sind, die für Eikörper mit den von Minkowski [Math. Ann. 57, 447—495 (1903)] eingeführten gemischten Rauminhalten übereinstimmen. Man hat es hier also mit einer Verallgemeinerung des Begriffes „gemischter Rauminhalt“ auf nichtkonvexe Bereiche zu tun. — Außer den hier referierten Formeln finden sich in der Arbeit manche andere, deren Inhalt weniger leicht in Worte zu fassen ist. Beweise werden mit Hilfe alternierender Differentiale geführt. *Maak*.

Berwald, L.: Integralgeometrie. XXV. Über die Körper konstanter Helligkeit. (Bemerkungen zu der vorstehenden Abhandlung.) Math. Z. 42, 737—738 (1937).

Man bringe die Oberfläche eines Eikörpers mit einer Ebene zum Schnitt und

mittele die Schnittkurvenlänge über alle parallelen Ebenen. Die Körper konstanter Helligkeit sind identisch mit denjenigen, für die dieses Mittel von der Ebenenrichtung unabhängig ist. Der Beweis ist eine Anwendung der ersten Formel im vorst. Ref. über die Arbeit „Integralgeometrie. XXIV“.

Maak (Hamburg).

Boos, Pierre: Propriétés caractéristiques de courbes gauches. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 28, 63—102 (1936).

Soit s l'abscisse curviligne de l'origine M d'un arc MM_1 d'une courbe C , l et L les longueurs de cet arc et de la corde qui le sous-tend et B l'angle au point M de l'arc et de sa corde. Cela posé, une courbe C est P si α dépend de l (et non de s), elle est P' si l est un produit des fonctions de s et de α seuls. Dans l'espace euclidien les courbes P sont des hélices circulaires, P' sont des hélices coniques. Les unes et les autres admettent un groupe continu de transformations en elles-mêmes (déplacement ou rotation-homothétie). Dans l'espace non-euclidien (de courbure constante) P' n'existent pas, tandis que P sont des hélices circulaires de l'espace. En espace affine on adopte comme s et l l'abscisse curviligne affine de M et la longueur affine de cet arc, comme L la distance affine des éléments linéaires de C en M et M_1 et on définit P et P' par les propriétés (qui les caractérisent également en géométrie euclidienne), à savoir: C est P si L est indépendant de s , elle est P' si L/l dépend seulement du quotient de l par une fonction de s . P est une courbe à courbure (et torsion) constante, P' est une courbe W de Klein et Lie. Dans tous les cas elles admettent un groupe de transformations en elles-mêmes. Diverses propriétés caractéristiques en géométrie euclidienne.

S. Finikoff (Moscou).

Dibbert, Herbert: Die Rahmenfigur als Verallgemeinerung der Reidemeisterfigur. Mitt. math. Ges. Hamburg 7, 323—355 (1937).

Figur 1 stellt für $n = 5$ eine „ n -Rahmenfigur“ dar, sie besteht aus $3n$ Kurven; $2n$ Kanten und n Diagonalen (punktirt). Ordnet man jeder Kante und Diagonale eine Kurvenschar in der Ebene zu, wobei nicht alle verschieden zu sein brauchen, so werden sich im allgemeinen aus diesen Scharen keine geschlossenen Rahmenfiguren bilden lassen. Verf. beweist: Dann und nur dann schließt sich der Rahmen bei jedem Versuch, wenn es möglich ist, die Diagonalkurvenscharen darzustellen durch $v_i(x, y) = \text{konst.}$, die Kanten durch $u_i(x, y) = \text{konst.}$, $w_i(x, y) = \text{konst.}$ (vgl. Figur), so daß identisch in x und y :

$$v_1 = u_2 - u_3 = w_2 - w_3$$

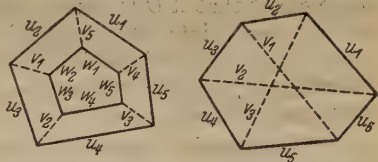
$$v_2 = u_3 - u_4 = w_3 - w_4$$

$$\dots\dots\dots$$

$$v_{n-1} = u_n - u_1 = w_n - w_1$$

$$v_n = u_1 - u_2 = w_1 - w_2$$

(1)



— Läßt man die rechte Hälfte dieser Gleichungen weg, so ergibt sich die entsprechende Bedingung für „gleichscharige Rahmenfiguren“, wobei entsprechende Kanten derselben Kurvenschar angehören sollen. — Aus (1) folgt $\sum v_i = 0$; Verf. beweist umgekehrt: Wenn es in einem n -Gewebe stetig differenzierbare „Normalparameter“ v_i gibt, wofür $\sum v_i = 0$, so lassen sich „Kantenscharen“ u_i und w_i dazu finden derart, daß die Rahmen geschlossen sind. — Figur 2 stellt für $n = 6$ eine „Diagonalfigur“ dar (n gerade). Entsprechend gilt: Dann und nur dann lassen sich aus $\frac{3}{2}n$ Kurvenscharen geschlossene Diagonalfiguren bilden, wenn für geeignete Normalparameter gilt:

$$v_1 = u_2 - u_3 = u_5 - u_6$$

$$n = 6 \quad v_2 = u_3 - u_4 = u_6 - u_1$$

$$v_3 = u_4 - u_5 = u_1 - u_2$$

Entsprechend für bel. gerades n . Setzt man $v_4 = v_1$, $v_5 = v_2$, $v_6 = v_3$, so folgt, daß sich aus den Kurvenscharen einer Diagonalfigur stets auch gleichscharige Rahmenfiguren bilden lassen. Ebenfalls aber ungleichscharig mit $w_i = u_{i+3}$ (Index mod 6). Eine n -Rahmenfigur, wobei in dieser Weise nur $\frac{3}{2}n$ verschiedene Kurvenscharen vorkommen, heißt D -Rahmenfigur. Verf. zeigt umgekehrt: Wenn $\frac{3}{2}n$ Kurvenscharen D -Rahmenfiguren bilden, so bilden sie entweder auch Diagonalfiguren oder es bilden (für $n = 6$) die $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ entsprechenden Scharen gleichscharige 3-Rahmenfiguren. — Als Sonderfall für $n = 3$ oder 4 findet Verf. einige Ergebnisse von Thomsen und Wünsche wieder.

Bol (Hamburg).

Topologie :

Frucht, Robert: Die Gruppe des Petersenschen Graphen und der Kantensysteme der regulären Polyeder. *Comment. math. helv.* 9, 217—223 (1937).

The group of a graph is the group of one-to-one incidence-preserving transformations of the graph into itself. For the graphs arising from the four regular solids with central symmetry the groups are just "double" the rotation groups of these solids. The author shows that the group of the Petersen graph (= dodecahedral graph with opposite elements identified) is the symmetric group in 5 variables. He gives a generalization of the Petersen graph which goes with the symmetric group in n variables; the graph of the $(n - 1)$ -simplex has this same group. *A. W. Tucker* (Princeton, N. J.).

Wagner, K.: Über eine Erweiterung eines Satzes von Kuratowski. *Deutsche Math.* 2, 280—285 (1937).

Kuratowski proved that a graph is planar if it fails to contain a subgraph equivalent, except for subdivision, to (a) ten edges connecting five vertices in all ways or (b) nine edges connecting one set of three vertices to another set of three in all ways [*Fundam. Math.* 15, 271—283 (1930)]. The author gives the following extension: a graph fails by one edge to contain (b), or a subdivision, if and only if it can be decomposed, by splitting in two each of $n - 1$ edges, into a set of n distinct graphs which are equivalent to planar triangulations (excluding those with five vertices) or to (a). *A. W. Tucker* (Princeton).

Waraszkiewicz, Z.: Sur les courbes planes topologiquement homogènes. *C. R. Acad. Sci., Paris* 204, 1388—1390 (1937).

The author presents an affirmative answer to the well known question proposed by Knaster and Kuratowski in 1920 (see *Fundam. Math.* 1, 223) as to whether every plane homogeneous continuum is necessarily a simple closed curve. The question is first reduced to the case of continua Γ which are irreducible cuttings of the plane such that every proper subcontinuum is a simple arc. It remains then to show that if such a continuum Γ is homogeneous it must be decomposable. The author shows that if such a continuum is indecomposable and homogeneous it must be made up entirely of so called recurrent points and the rest of the proof follows from a lemma to the effect that if C is an indecomposable continuum of the type Γ consisting entirely of recurrent points, then every homeomorphism F of C into itself which preserves a composant S of C is an involution and has a fixed point in S . *G. T. Whyburn*.

Wheeler, Charles H.: A type of homogeneity for continuous curves. *Amer. J. Math.* 59, 315—326 (1937).

The author investigates conditions for a compact locally connected continuum M to be cyclic element homogeneous, i.e., given any two true cyclic elements of M there shall exist a homeomorphism of M into itself sending one of these into the other. In case M has only a finite number of true cyclic elements and if M is the smallest A -set in M containing all of them the following conditions are found to be necessary and sufficient in order that M be cyclic element homogeneous: (1) the true cyclic elements of M be grouped in clusters with the same number in each cluster, (2) no cluster cuts M , (3) there exists a point c such that each cluster is the same number k of branch points away from c , (4) at each i -th branch point from c ($i = 1, 2, \dots, k$) there are the same number of branches and (5) if C_v and C_s are any two cyclic elements of M there exists a homeomorphism of C_v into C_s which sends the cut points of M on C_v into the cut points of M on C_s . In the finite case also the author remarks that cyclic element homogeneity implies bi-cyclic element homogeneity, i.e., for any two cyclic elements C and C' of M there exists a homeomorphism of M into itself sending C into C' and at the same time sending C' into C . That this no longer holds in the case of infinitely many true cyclic elements is shown by an example. The author discusses the infinite case and gives a necessary condition which has not yet been shown sufficient.

G. T. Whyburn (Virginia).

Bassi, Achille: On some new invariants of a manifold. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 698—699 (1936).

Es wird die Zerlegung von absoluten n -Mannigfaltigkeiten (im Sinne von Newman-Alexander) in Elementarmannigfaltigkeiten betrachtet; letztere werden auf drei verschiedene Arten definiert. Dementsprechend ergeben sich als neue Invarianten drei Minimalzahlen, die mindestens den Wert 2, höchstens den Wert $n + 1$ haben. Die Arbeit enthält noch einige weitere Resultate und Hinweise auf den Zusammenhang mit den kombinatorischen Kategorien von Schnirelmann und den Alexanderschen Tensoren. Beweise sind nicht gegeben. *Friedrich Levi* (Calcutta).

Kaufmann, B.: On homologies in general spaces. Proc. London Math. Soc., II. s. 43, 1—19 (1937).

Der Inhalt der Arbeit besteht im wesentlichen im Beweise der folgenden Vermutung des Ref.: Ist F ein n -dimensionales Kompaktum, Z' ein r -dimensionaler wahrer Zyklus in F , $0 \leq r < n$, welcher dortselbst berandet, so kann die Homologie $Z' \sim 0$ (nach welchem Koeffizientenbereich immer sie auch gilt) durch die Tilgung einer höchstens $(n - r - 1)$ -dimensionalen abgeschlossenen Teilmenge von F zerstört werden. Andererseits gibt es in jedem n -dimensionalen F bei jedem r , $0 \leq r < n$, einen r -dimensionalen berandenden Z' (im allgemeinen, nach variablem Modul) solcher Art, daß die Homologie $Z' \sim 0$ durch Tilgung keiner abgeschlossenen Menge von einer Dimension $< n - r - 1$ zerstört werden kann. Man sagt, daß die Punktmenge $M \subset F$ die Homologie $Z' \sim 0$ zerstört, wenn es eine zu M fremde abgeschlossene Teilmenge F' von F gibt, die Träger des Zyklus Z' ist, und wenn andererseits keine abgeschlossene zu M fremde Teilmenge von F existiert, in der Z' berandet. Das wesentliche Hilfsmittel beim Beweis besteht in den vom Verf. erbrachten Verschärfungen der Phragmén-Brouwerschen Sätze (im Sinne des Ref.), insbesondere in der Benutzung der induktiven Verschlingungskonstruktion des Verf., in deren Gestalt die moderne Dimensionstheorie zweifellos ein weittragendes Forschungsinstrument bekommen hat. *Alexandroff*.

Wallman, Henry: Lattices and bicom pact spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 164—165 (1937).

M. H. Stone [Boolean algebras and their application to topology. (See this Zbl. 10, 81)] has recently established a fundamental correlation between totally disconnected bicom pact Hausdorff spaces and Boolean algebras (complemented distributive lattices). The author announces an extension of this to a correlation between general bicom pact Hausdorff spaces and a certain larger class of distributive lattices L . By means of this, he can imbed any normal Hausdorff space R densely in a bicom pact one R^* ("points" in R^* are intersections of maximal families of closed sets in R having no void finite intersections; R^* clearly satisfies the condition of Heine-Borel). — He can speak of a basis for the lattice $L(R)$ of all closed subsets of R ; Alexandroff's method of projection spectra amounts essentially to generating $L(R)$ abstractly from a countable basis, and exhibiting the latter as the limit of an expanding family of finite sublattices. Since these finite sublattices can be associated with combinatorial complexes in the classic sense, the author has connected Stone's algebraic characterization of "Boolean" spaces with the usual algebraic characterization of manifolds through cells and their incidence relations. — He promises to analyze the dimension theory of R in terms of $L(R)$, and also its homology theory. *Garrett Birkhoff* (Cambridge, U. S. A.).

Mechanik.

● **Platrier, Ch.:** Les axiomes de la mécanique newtonienne. (Actualités scient. et industr. Nr. 427. Exposés de mécanique newtonienne. Cours de l'école polytechn. Publié par Ch. Platrier. I.) Paris: Hermann & Cie. 1936. 59 pag. Frs. 14.—.

Mit dem vorliegenden Heft beginnt der Verf. die Herausgabe seiner Vorlesungen

über Mechanik, nachdem er in 3 früheren (vgl. dies. Zbl. 14, 137) Hilfsmittel aus der Kinematik und Geometrie der Massen dargestellt hatte. Wie im Vorwort betont ist, werden die Grundlagen im wesentlichen im Anschluß an Mach und Painlevé behandelt. Inhalt: I. Vom Messen in der Mechanik. Absoluter Raum und absolute Zeit. (Meßmethoden für Raum, Zeit, Quantität der Materie. Maßsysteme, Dimensionen, Homogenität und Ähnlichkeit in der Mechanik.) II. Die fundamentalen Axiome. (Struktur des Universums. Die Axiome der Mechanik.) III. Von der Kraft. (Definition. Statisches Messen von Kräften. Klassifikation der Kräfte.) *W. Fenchel.*

Picard, Émile: Homogénéité et similitude en mécanique. Bull. Sci. math., II. s. 61, 106—110 (1937).

The author shows how the analytical solution of physical problems may in many cases be written down (save for numerical constants) without making use of any other principle than the theory of dimensions. *Whittaker* (Edinburgh).

De Mira Fernandes: Sur le calcul de l'énergie d'accélération d'un corps solide. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 1398—1399 (1937).

M. Chazy, Zbl. Math. 15, 420, en employant le calcul vectoriel d'une façon systématique, a refait le calcul de l'expression de l'énergie d'accélération d'un corps solide ayant un point fixe, donnée par M. Platrier et M. Aimond, ce Zbl. 14, 138. L'Auteur se sert de la formation classique des équations d'Euler et trouve deux autres expressions, qui peuvent être utiles quelquefois, de l'énergie d'accélération.

H. I. E. Beth (Amersfoort).

Slivskin, N. A.: Sur les oscillations de rotation d'une sphère remplie d'un liquide visqueux. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 14, 333—336 (1937).

Analytische Mechanik, Ergodenprobleme:

Martin, Monroe H.: The ergodic function of Birkhoff. Duke math. J. 3, 248—278 (1937).

Ausgangspunkt ist eine analytische stationäre und volumtreue Strömung in einem n -dimensionalen Kontinuum Ω . Ist die Strömung ergodisch, so kann man sich fragen: Wie groß ist die Mindestzeit $T = T(\varepsilon)$ derart, daß das von einem passenden Punkt $P = P_0$ von Ω ausgehende Stromlinienstück P_t , $0 \leq t \leq T$, in die ε -Nachbarschaft jedes beliebigen Punktes von Ω gelangt? Eine grobe Überlegung zeigt, daß bei n -dimensionaler Strömung $T(\varepsilon)$ mindestens von der Größenordnung ε^{1-n} sein muß. Birkhoff sprach die Vermutung aus, daß diese Mindestordnung bei bestimmten Strömungen, z. B. bei dem geodätischen Problem für die geschlossenen Flächen konstanter negativer Krümmung, wirklich auftritt. Verf. untersucht in der vorliegenden Arbeit gerade diesen Fall und findet nach langwierigen Abschätzungen für $T(\varepsilon)$ eine obere Schranke von der Größenordnung $\varepsilon^{-\omega(p)}$, wo ω nicht wie erwartet $n - 1 = 2$ ist, sondern vom Geschlecht p der Fläche abhängt und mit p über alle Grenzen wächst. Ob $T(\varepsilon)$ wirklich ein von p abhängiges asymptotisches Verhalten aufweist, wird durch die Rechnungen des Verf. nicht entschieden.

E. Hopf (Leipzig).

Visser, Cornelis: On certain infinite sequences. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 40, 358—367 (1937).

Let S be a space in which measure is defined such that $mS = 1$. Let $f_1(x), f_2(x), \dots$, be an infinite sequence of measurable functions defined in S and such that $0 \leq f_n(x) \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$. The author proves two theorems concerning such sequences. The first states that if a is a point of accumulation of the numbers $\int_S f_n(x) dx$, $n = 1, 2, \dots$, given $\varepsilon > 0$ there exist integers p and q , $p \neq q$, such that $\int_S |f_p(x) - f_q(x)| dx < 2a(1-a) + \varepsilon$.

The second states that given $\varepsilon > 0$ and a positive integer m , there exists an infinite subsequence $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \dots$, such that for any positive integer $r \leq m$,

$$\int_S f_{n_1}(x) \dots f_{n_r}(x) dx > a^r - \varepsilon,$$

the indices i_1, \dots, i_r , being subject only to the restriction that no two are equal. Both of these theorems include a previous theorem of the author (this Zbl. 14, 418). Application of these theorems to incompressible flows in S yield more general recurrence theorems.

Hedlund (Bryn Mawr).

Robbins, H. E.: On a class of recurrent sequences. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 413—417 (1937).

Eine beiderseitig unendliche Folge von Nullen und Einsen heißt rekurrent, wenn es zu jedem $n > 0$ ein $f = f(n)$ gibt mit der Eigenschaft, daß jeder Abschnitt der Länge $f(n)$ in der Folge jeden in der Folge vorkommenden Abschnitt der Länge n als vollständigen Abschnitt enthält. Das kleinstwertige $f(n) = T(n)$ nennt der Verf. die Ergodenfunktion der Folge. Für jede periodische Folge ist $T(n) = n + \text{konst.}$ Verf. konstruiert rekurrente, nichtperiodische Folgen mit $T(n) < \text{konst.} \cdot n$ und zeigt, daß es zu jeder Funktion $R(n) > n$ eine rekurrente Folge gibt derart, daß für alle genügend großen n : $T(n) > R(n)$ ausfällt.

E. Hopf (Leipzig).

Kryloff, Nicolas, et Nicolas Bogoliouboff: Les propriétés ergodiques des suites des probabilités en chaîne. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 1454—1456 (1937).

Fortsetzung einer früheren Note (dies. Zbl. 16, 312) und Ankündigung weiterer wichtiger Sätze über unendliche Punktfolgen in einem Raume Ω , wobei der Übergang von einem Punkte zu einem anderen durch eine feste Übergangswahrscheinlichkeit charakterisiert wird. In der ersten Note wurden auf ein solches stochastisches System die grundlegenden Begriffe der Ergodentheorie — diese bezieht sich auf den Grenzfall einer völlig bestimmten, eindeutigen Abbildung von Ω auf sich — in natürlicher Weise übertragen (zugeordneter linearer Operator, invariantes Maß). Im Gegensatz zu jenem Grenzfall kommt man bei stochastischen Systemen zu einfacheren und eleganteren Ergebnissen. Es gibt nämlich nur endlich viele invariante Maße vom transitiven Typus. Die invarianten Maße bilden ein Simplex \mathfrak{R} . Seine Ecken sind genau die transitiven Maße. Ihre Bedeutung beruht, grob gesprochen, darin, daß sie auf gewisse (ergodische) Teile des Raumes Ω konzentriert sind. Es ist fast sicher, daß die Punkte einer unendlichen Folge schließlich in einem ergodischen Teile landen. Beginnt sie in einem ergodischen Teil, so ist es fast sicher, daß die ganze Folge darin bleibt. Die mittlere Verweilhäufigkeit in irgendeinem Teile von Ω drückt sich in ganz bestimmter Weise durch die transitiven Maße aus. — Weitere Ergebnisse betreffen kleine Änderungen des Wahrscheinlichkeitsgesetzes. (Wegen der präzisen Definition sei auf die Note verwiesen.) Bei einer hinreichend kleinen Änderung besteht Halbstetigkeit der invarianten Maße (und damit der Verweilhäufigkeiten) in folgendem Sinne: Das geänderte Simplex \mathfrak{R}' liegt in einer beliebig vorgegebenen „Nachbarschaft“ des ursprünglichen Simplexes \mathfrak{R} . Durch geeignete kleine Abänderung kann ferner erreicht werden, daß ein beliebig vorgegebener Punkt von \mathfrak{R} Eckpunkt von \mathfrak{R}' wird. E. Hopf.

Himmelsmechanik, Gleichgewichtsfiguren:

● Appell, Paul: Traité de mécanique rationnelle. Tome 4, Fasc. 2: Les figures d'équilibre d'une masse hétérogène en rotation. Figure de la terre et des planètes. 2. edit. mise à jour par Alex. Véronnet. Paris: Gauthier-Villars 1937. XIII, 292 pag. Frcs. 65.—.

Das vorliegende ganz von Véronnet verfaßte Werk erscheint als zweites Heft des vierten Bandes von Appells Traité de mécanique rationnelle. Dessen in den Acta math. 47, 15—23 (1926) zu findende allgemeine Untersuchung über die Bedingungen des relativen Gleichgewichts, welche die Möglichkeit einer Poinsothbewegung ausschließt, werden im ersten Teil dargestellt und auf permanente Bewegungen ausgedehnt, bei denen die Flüssigkeitsmasse nicht als starrer Körper rotiert. Diese müssen insbesondere bei den im zweiten Teil behandelten ellipsoidischen Schichtungen, die nicht exakte Gleichgewichtsfiguren einer heterogenen Masse sein können, aber als Approximationen und als Schranken dieser aufschlußreich sind, in Betracht gezogen werden — und auch am Schluß des vierten (letzten) Teils, der nach dem ausführlichen Vergleich der Clairautschen Hypothesen mit der geodätischen und astronomischen Erfahrung auch von den Clairautschen abweichende Annahmen in ihren Konsequenzen verfolgt, insbesondere mit Rücksicht auf die Figuren der Himmelskörper wie Jupiter, Saturn und Sonne. — Das Hauptstück, die Theorie der Clairautschen Gleichgewichtsfigur der Erde

bringt der dritte Teil — die nötige Entwicklung des Newtonschen Potentials freilich nicht nach den strengen Methoden von Liapounoff [*Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes*. Mém. Acad. Sci. Pétersbourg, VIII. s. 14, Nr. 7 (1903)] und Lichtenstein [Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. 3. Abh. Nichthomogene Flüssigkeiten. Figur der Erde. Math. Z. 36, 481, dies. Zbl. 6, 373, sowie Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, S. 91 ff. Berlin 1933]. Ebenso geschieht die Bestimmung der Gleichgewichtsfigur nur in 1. und 2. Approximation. Der Konvergenzbeweis für die unendliche Folge der Approximationen und damit der Existenzbeweis für die Gleichgewichtsfigur ist von Liapounoff zum Teil nur angedeutet, von Lichtenstein in anderer Weise vollständig durchgeführt worden: alles in den genannten Arbeiten, die das Fundament der Theorie heterogener Gleichgewichtsfiguren sind — vom Verf. aber nicht erwähnt werden. Neben diesen auf stark inhomogene, langsam rotierende Gleichgewichtsfiguren bezüglichen Untersuchungen wäre auch der schwach inhomogenen Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der homogenen zu gedenken, die ebenfalls (in der Nachbarschaft der Maclaurinschen und Jacobischen nichtsingulären Ellipsoide) von Liapounoff (in der posthum erschienenen Abhandlung: *Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation*, I und II, 200-Jahrband der Acad. Sci. URSS, Leningrad 1925, 1927) und allgemein von Lichtenstein (loc. cit.) sichergestellt sind. In der Nachbarschaft eines (nichtsingulären) Jacobischen Ellipsoids existieren wirklich heterogene Gleichgewichtsfiguren, die nicht Rotationssymmetrie um die Drehachse besitzen, sehr im Widerspruch zu einer Behauptung des Verf., die sich von der zweiten Seite des Vorworts an durch viele allgemeine Betrachtungen des Werkes hindurchzieht und deren Begründung auf S. 26 offenbar nicht stichhaltig ist: Die Schnittlinie einer Fläche konstanten Newtonschen Potentials mit einer Niveaulfläche (konstanter Dichte) liegt auf einem Kreiszylinder, braucht aber keine Kreislinie zu sein.

E. Hölder (Leipzig).

Perron, Oskar: Neue periodische Lösungen des ebenen Drei- und Mehrkörperproblems. Math. Z. 42, 593—624 (1937).

Bewegen sich zwei Massenpunkte umeinander in Keplerschen Kreisen, so daß das System in einem rotierenden Achsenkreuz in relativem Gleichgewicht ist, und denkt man sich eine der beiden Massen in zwei Teile gespalten, so ist es zu erwarten, daß man durch das Poincarésche Störungsprinzip eine Schar von periodischen Lösungen des ebenen Dreikörperproblems erhalten kann, wobei der abgespaltene dritte Körper eine mondbahnartige Bewegung ausführt. Ähnlich beim Vierkörperproblem, wenn man von den Lagrangeschen Gleichgewichtslösungen des Dreikörperproblems ausgeht. Der Verf. hat diesen Gedanken in früheren Arbeiten (dies. Zbl. 14, 333 u. 419) durchgeführt. Er findet jetzt durch eine eingehendere Diskussion, daß die so erhaltenen Scharen unerwarteterweise zweiparametrisch sind, so daß die a. a. O. gefundenen Lösungen durch Unterdrückung eines der beiden Scharparameter entstehen. Der Beweis wird im Rahmen der Poincaréschen Methode durch den Nachweis geführt, daß die sog. Verzweigungsgleichungen dank der klassischen Integrale [vgl. E. Hölder, Math. Z. 31, 230—231 (1929) und wegen Literatur S. 200—202 (vgl. a. dies. Zbl. 3, 134)] keine Schwierigkeit bereiten und die ausschlaggebende Jacobische Determinante in nichtverschwindende Faktoren zerfällt. — Der Ref. möchte bemerken, daß mit Rücksicht auf den parasitären Scharparameter, der durch das von O. Dziobek (Die mathematischen Theorien der Planeten-Bewegungen, S. 69. Leipzig 1888) sog. dritte Keplersche Gesetz des n -Körper-Problems bedingt wird, bei einer Zählung von unabhängigen Parametern Vorsicht geboten ist.

Wintner (Baltimore).

Garcia, Godofredo, et Alfred Rosenblatt: Sur la régularisation du problème plan des trois corps. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 1029—1031 (1937).

Berichtigung von Rechenfehlern und Weiterführung der Reihenentwicklungen in einer früheren Arbeit des zweitgenannten Verf. [Bull. Sci. math. (2) 52, 1—8 (1928)].

Wintner (Baltimore).

Koziel, R.: Über die Gibbsschen Formeln für die Dreiecksflächenverhältnisse n_1 und n_3 . Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1937, 536—559.

Die Gibbsschen Formeln für die Gaußsche Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen werden als Näherungsausdruck mit Hilfe eines Polynoms 4. Grades neu abgeleitet. Es werden Vergleiche mit Näherungsformeln anderer Autoren angestellt.

Klose (Berlin).

Brown, Ernest W.: The stellar problem of three bodies: IV. Perturbations in the system ξ Ursae Majoris. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **97**, 388—395 (1937).

Die in den früheren Artikeln des Verf. [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **97**, 56—61, 62—66 (1936), 116—127 (1937); dies. Zbl. **15**, 376 u. 420] auseinandergesetzte Methode zur Berechnung von Elementenstörungen wird auf das vierfache Sternsystem ξ Ursae Majoris angewandt. An Stelle des engeren Paares wird dessen Schwerpunkt gesetzt. Für die beiden Komponenten des weiteren Paares ergeben sich in der relativen Exzentrizität Schwankungen zwischen 0,18 und 0,54, in der Neigung der Bahnebenen zwischen 37 und 47° mit einer Hauptperiode von 1930 Jahren. Unter den Störungsgliedern kürzerer Periode sind solche von 30-jähriger Periode nachweisbar. *Klose.*

Spencer Jones, H.: The mean motions of the lunar perigee and node and the figure of the moon. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **97**, 406—409 (1937).

Im Anschluß an eine von E. W. Brown gefundene, sehr bedeutsame Verbesserung seiner Mondtheorie [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **97**, 116—127 (1937); dies. Zbl. **15**, 420] wird der Einfluß der neuen Störungsglieder auf die Gestalt des Mondes und der Erde berechnet. Wichtigstes Ergebnis ist, daß nunmehr die Hauptträgheitsmomente des Mondes mit den aus den Librationsbeobachtungen abgeleiteten in guter Übereinstimmung sind. *Klose (Berlin).*

Rein, Natalie: Some notes on B. Lindblad's paper „on the evolution of a rotating system of material particles“. Astron. J. Soviet Union **14**, 156—162 (1937).

Ein System rotierender, gravitierender, sich gegenseitig unelastisch stoßender Partikel, das von Lindblad, Monthly Notices **94**, Nr. 3, als mechanisches Modell von Saturnring, Planetensystem oder Milchstraßensystem in seinem asymptotischen Verhalten untersucht worden ist, wird von der Verf. in den Voraussetzungen und der mathematischen Durchführung erheblich präzisiert — letzteres durch Bezugnahme auf die Stabilitätsuntersuchungen von Liapounoff, Ann. de Toulouse, II. s. **9**, 203 bis 474 (1907). Zum Schluß folgt der Vergleich mit einer ähnlichen Untersuchung von Dubošin, Astron. J. Soviet Union **13**. *E. Hölder (Leipzig).*

Jankowski, K.: Hydrodynamische Grundlagen der Kosmogonie. II. Wesenheit der Himmelsmechanik aus hydrodynamischem Überblick. Astron. Nachr. **263**, 89—96 (1937).

Fortführung eines Versuches, die Kosmogonie auf Grund hydrodynamischer Vorstellungen zu begründen. Der physikalische Sinn der Rechnungen des Verf. ist dem Ref. ebenso wie in der ersten Note (dies. Zbl. **16**, 88) unverständlich. *E. Hopf.*

Wachtl, O.: Studien zur endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation. Astron. Nachr. **262**, 353—374 (1937).

Zusammenstellung einiger der herkömmlichen Abänderungsvorschläge des Newtonschen Gesetzes, nebst Angabe der jeweiligen Bewegungsgleichungen und klassischen Integrale. *Wintner (Baltimore).*

Quantentheorie.

Donder, Th. de, et J. Géhéniau: Le modèle électronique de la mécanique ondulatoire de Dirac. C. R. Acad. Sci., Paris **205**, 30—32 (1937).

Markow, M.: Zur Diracschen Theorie des Elektrons. II. Die Ideen Pauli-Weisskopfs und die Diracschen Gleichungen zweiter Ordnung. Physik. Z. Sowjet, **11**, 284—296 (1937).

An Hand der Gleichung 2. Ordnung mit Spin (I. Teil der Arbeit; dies. Zbl. **16**, 189) wird versucht, die Theorie des Positrons und des Neutrinos in die Diracsche Theorie einzuarbeiten im Sinne der Forderung von Pauli und Weißkopf (dies. Zbl. **10**, 135), daß die Ladungsdichte nicht positiv definit zu sein braucht. Es zeigt sich, daß hierbei eine nichttriviale Lösung mit der Ladungsdichte Null auftritt, die als Bewegungsgleichung des Neutrinos gedeutet wird. *S. Flügge (Berlin-Dahlem).*

Stevenson, A. F.: A generalization of the equations of the self-consistent field for two-electron configurations. *Proc. roy. Soc. London A* **160**, 588—604 (1937).

Für zwei Elektronen im Potentialfelde $V = -V(r_1) - V(r_2) + \frac{1}{r_{12}}$ wird an Stelle des Hartreeansatzes $\psi = R_1(r_1) \cdot R_2(r_2)$ der etwas bessere versucht, $\psi = R_1(r_1) \cdot R_2(r_2) \cdot \chi(\theta)$, wenn θ der Winkel zwischen r_1 und r_2 ist. Der Bahnbegriff bleibt bei dieser Verallgemeinerung erhalten. Der Fall der Russell-Saunders-Kopplung zweier Elektronen in einem Atom wird eingehend nach dieser Methode behandelt. Dabei ergibt sich eine erhebliche Komplikation der Methode, sobald man versucht, auch der Austausch-entartung Rechnung zu tragen, ähnlich wie bei der Erweiterung der Hartreemethode durch Fock. Verf. meint jedoch, daß die von ihm vorgeschlagene Methode ohne Austausch bereits erheblich tiefere Energiewerte liefert als die Methode von Hartree-Fock. Ein numerisches Beispiel ist noch nicht durchgeführt. *S. Flüge* (Berlin-Dahlem).

Rosenthal, Jenny E., and Lloyd Motz: Application of a new mathematical method to vibration-rotation interaction. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **23**, 259—265 (1937).

Verf. geben ein Verfahren zur Berechnung der Schwingungs-Rotations-Wechselwirkung an, welches die sonst notwendige Reihenentwicklung des aus der Schrödingergleichung abgeleiteten Rotationsterms in der Nähe des Gleichgewichtspunkts und die übliche Störungsrechnung sowie das Verfahren nach Wentzel-Kramers-Brillouin vermeidet. Es besteht darin, daß von dem radialen Teil der Eigenfunktion eines rotierenden Oszillators zunächst der das asymptotische Verhalten beschreibende Faktor abgespalten wird. Der Rest läßt sich dann als Produkt eines Polynoms mit einer Exponentialfunktion, deren Exponent erst durch Reihenentwicklung gewonnen wird, hinschreiben. Im Gegensatz zu den bekannten Verfahren wird eine komplexe Integration sowie die Darstellung der Energieniveaubedingungen in Form von Phasenintegralen hierbei vermieden. Das Verfahren wird an Hand der Bestimmung der Energieniveaus des harmonischen und anharmonischen Oszillators erläutert; es eignet sich besonders zur einfachen Berechnung der Korrekturen höherer Ordnung.

Henneberg (Berlin).

Landau, L.: Zur statistischen Theorie der Kerne. *Phys. Z. Sowjet.* **11**, 556—565 (1937).

Verf. zeigt durch thermodynamische Betrachtung der Eigenschwingungen eines Flüssigkeitstropfens, daß Bethes Formel (dies. Zbl. **14**, 335) für die Dichte der angeregten Zustände eines Kerns im wesentlichen von der dort benutzten Hartreenäherung unabhängig ist. Er leitet eine Beziehung zwischen der Niveaudichte und der Breite eines Niveaus her und zeigt mit ihrer Hilfe, daß Bethe (dies. Zbl. **15**, 281) bei der Neuberechnung der Kernradien eine zu kleine Niveaubreite angesetzt und dadurch zu große Radien erhalten hat. Für ThA ergibt sich statt Bethes $r = 13 \cdot 10^{-13}$ cm nun $10,5 \cdot 10^{-13}$ cm. Ferner schätzt Verf. den Energieverlust eines Neutrons und die Energie der nachträglichen Ausstrahlung bei unelastischer Streuung ab.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Ferretti, Bruno: Propagazione ed assorbimento del neutrino. *Nuovo Cimento*, N. s. **14**, 70—75 (1937).

Ausgehend von der Fermischen Theorie des β -Zerfalls berechnet Verf. die Wahrscheinlichkeit für folgenden Prozeß: Ein Kern emittiert ein (negatives) Elektron und ein Neutrino; das Neutrino wird von einem zweiten Kern absorbiert unter Emission eines Positrons. Die Wahrscheinlichkeit ist außerordentlich klein, so daß es experimentell unmöglich sein würde, in dieser Weise die Energie des Neutrinos wiederzufinden.

Casimir (Leiden).

Nordheim, L. W., and F. L. Yost: On the matrix element in Fermi's theory of β -decay. *Physic. Rev.*, II. s. **51**, 942—947 (1937).

Eine Neuberechnung des Einflusses des Coulombfeldes auf die Wahrscheinlichkeit des β -Zerfalls zeigt, daß das Matrixelement für schwere Kerne erheblich kleinere Werte

haben muß als für leichte, um die empirischen Ergebnisse deuten zu können. Als Erklärung hierfür wird das Bohrsche „Sandsackmodell“ der schweren Kerne herangezogen. Die Diskussion zeigt, daß die Benutzung der antisymmetrisierten Hartree-eigenfunktionen noch nicht genügt, daß aber wohl Linearkombination mehrerer solcher Funktionen zum Ziele führen dürfte. Eine nähere Ausführung dieses Gedankens scheint aber einstweilen noch nicht möglich.

S. Flügge (Berlin-Dahlem).

Achieser, A., und I. Pomerantschuk: Kohärente Streuung von γ -Strahlen an Kernen. Phys. Z. Sowjet. 11, 478—497 (1937).

Die Verf. untersuchen die kohärente Streuung von γ -Strahlen an Kernen auf Grund der Diracschen Theorie des Positrons. Unter dem Einfluß des Kernfeldes erzeugt ein Photon ein Paar, und dieses ergibt durch Wiedervereinigung das gestreute Photon. Die Abhängigkeit der Streuwahrscheinlichkeit von Kernladung, Frequenz und Streuwinkel wird erörtert.

R. de L. Kronig (Groningen).

Wigner, E.: On the structure of nuclei beyond oxygen. Physic. Rev., II. s. 51, 947—958 (1937).

Der Verf. erörtert die tiefliegenden Zustände der aus Protonen und Neutronen aufgebaut gedachten Kerne oberhalb Sauerstoff, vor allem die Unterschiede im Energieinhalt isobarer Kerne, wie sie in der Kurve der Massendefekte empirisch zum Vorschein kommen.

R. de L. Kronig (Groningen).

Rarita, William, and R. D. Present: On the nuclear two-, three- and four-body problems. Physic. Rev., II. s. 51, 788—798 (1937).

Aus den experimentell bekannten Massendefekten von H^2 und H^3 und aus dem Streuquerschnitt von Protonen für Neutronen werden die willkürlichen Konstanten in einem geeignet gewählten Ansatz für die Wechselwirkung der Kernbausteine nach der Variationsmethode von Ritz bestimmt. Mit Hilfe dieses Ansatzes ergibt sich der Unterschied der Kernmassen von H^3 und He^3 sodann in guter Übereinstimmung mit dem Experiment, während für He^4 eine 20% zu große Bindungsenergie resultiert.

R. de L. Kronig (Groningen).

Papapetrou, A.: Über den Diamagnetismus des Elektronengases. Z. Physik 106, 9—16 (1937).

Bei der Berechnung des Diamagnetismus eines Elektronengases durch Landau und der Verdeutlichung des Ergebnisses durch Teller (dies. Zbl. 1, 107) wurde die Ausdehnung des Metallstückes als groß gegen die Elektronenbahnen im Magnetfeld angesehen. Hier wird nun in einer Richtung senkrecht zum Magnetfeld endliche Dicke angenommen und gezeigt, daß das Landausche Ergebnis bestehen bleibt, solange diese Dicke größer ist als die Elektrobahnen. (Für noch geringere Dicken wird eine Vermutung geäußert.)

F. Hund (Leipzig).

Lifschitz, E.: Elektronengas im magnetischen Feld. Physik. Z. Sowjetunion 11, 141—156 (1937).

In Fortsetzung einer Arbeit von Landau (dies. Zbl. 15, 382) wird eine Differentialgleichung für die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten der Moleküle eines Gases abgeleitet, das sich in einem homogenen magnetischen Feld befindet, unter der Annahme, daß die Moleküle aufeinander Coulombsche Kräfte ausüben, die so stark sind, daß nur „Stöße“ bei großer Entfernung der Stoßpartner zu berücksichtigen sind. Für den stationären Fall ergibt sich als Lösung dieser Gleichung die Maxwellsche Verteilung. Durch das Einschalten des Feldes wird natürlich die Geschwindigkeitsverteilung gestört und man kann auf Grund der Differentialgleichung die Relaxationszeit abschätzen, mit der diese Störung verschwindet. Es ergibt sich, daß die Einstellung rascher erfolgt für die Geschwindigkeiten senkrecht zum Feld als für die parallel zum Feld. Nimmt man ferner an, daß die Dichte und die Temperatur Funktionen der Koordinaten und der Zeit sind, so kann man ausrechnen, wie schnell sich diese Größen im Gase ausgleichen. Es zeigt sich, daß sich die Temperatur rascher ausgleicht als die Dichte. Die erhaltenen Ergebnisse kann man benützen, um die

Teilchendichte in einem Bündel geladener Teilchen entlang seiner Richtung oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Breite des Bündels entlang seiner Richtung zu berechnen, wenn sich das Bündel in der Richtung des Magnetfeldes fortbewegt. *Fürth* (Prag).

Galperin, F.: Die dynamische Theorie der Röntgenstrahlinterferenzen und Quantenmechanik. *Ž. eksper. teoret. Fis.* **6**, 1041—1052 u. deutsch. Zusammenfassung 1052 (1936) [Russisch].

Nach der Theorie der Röntgenstrahlinterferenzen von Laue u. a. wird die während einer Schwingungsperiode vom elektromagnetischen Feld in einem beliebigen Punkt des Kristallgitterraumes geleistete Arbeit Null. Verf. zeigt, daß dieses Ergebnis mit der Quantenmechanik im Widerspruch steht und daß diese Arbeit nur in der elementaren Gitterzelle Null ist. — Eine allgemeine Dielektrizitätskonstante ϵ , die die volle elektrische Induktion mit Hilfe des Feldes bestimmt, existiert nicht; vielmehr gehört zu jeder der gebeugten Partialwellen s eine eigene Dielektrizitätskonstante ϵ_s .

Henneberg (Berlin).

Wick, G. C.: Über die Streuung langsamer Neutronen an Atomgittern. *Physik. Z.* **38**, 403—406 (1937).

Verf. behandelt theoretisch die Streuung langsamer Neutronen an einem kubischen Kristall unter besonderer Berücksichtigung der gegenüber der Röntgenstreuung auftretenden Unterschiede. Eine Analogie besteht nämlich im wesentlichen nur bei der kohärenten Lauestreuung, bei der keine Schallquanten beteiligt sind. Es zeigt sich, daß Neutronen, deren Wellenlänge $\lambda > 2d$ (d die Gitterkonstante) ist, unter Emission eines Schallquants nicht gestreut werden können. Außer der genannten Bedingung, die identisch ist mit $p < h/2d$, liefern Energie- und Impulssatz noch die weitere Bedingung $p < mV$ für den Impuls der Neutronen, in der m die Neutronenmasse, V die „Schallgeschwindigkeit“ in dem Kristall ist. Diese Bedingung ist jedoch im allgemeinen weniger scharf als die erste. Im Gegensatz zur Streuung von Röntgenstrahlen geht die Neutronenstreuung unter Absorption von Schallquanten mit T^3 , so daß selbst bei praktisch erreichbaren Temperaturen ein Kristall für Neutronen mit $\lambda > 2d$ vollkommen durchsichtig ist (wenn man von etwaiger echter Absorption absieht). Die zugrunde liegenden Rechnungen für das Gitter, die für ein einzelnes Atom ähnlich wie die von Mott [*Proc. Roy. Soc. London A* **127**, 658 (1930)] durchgeführt wurden, werden kurz angedeutet.

Henneberg (Berlin).

Harding, J. W.: The dynamical theory of electron diffraction and its application to some surface problems. *Philos. Mag.*, VII. s. **23**, 271—294 (1937).

Es wird die Elektronenbeugung an dem folgenden Kristallmodell durchgerechnet. Jede Kristallebene wird durch einen Kronig-Perencyschen Potentialberg repräsentiert. Diese Ebenen können in der Nähe der Oberfläche beliebig ungeordnet sein, und es kann ihnen auch ein bestimmter „Absorptionskoeffizient“ zugeschrieben werden. Es wird versucht, mit dieser Theorie die beobachteten Abweichungen in der Breite der selektiven Reflexionsgebiete von der Abschätzung von Bethe, der einen vollkommenen Kristall annimmt, zu erklären. Es wird gezeigt, daß Oberflächenschichten von Fremdatomen mit verschobenem Ebenenabstand Abänderungen der richtigen Größenordnung hervorrufen können.

Nordheim (Lafayette-Indiana).

Fröhlich, H.: Die spezifische Wärme der Elektronen kleiner Metallteilchen bei tiefen Temperaturen. *Physica* **4**, 406—412 (1937).

Auf Grund der Tatsache, daß die Energiebänder der Elektronen in einem Metall (mit der Annäherung durch einzelne Elektronen im periodischen Kraftfeld) zerfallen, wenn die Dimensionen der Metallteilchen kleiner werden als die freie Weglänge der Elektronen, ergeben sich Abweichungen von der Proportionalität der spezifischen Wärme mit T , wenn kT wesentlich kleiner als der Abstand der Teilbänder wird. An gewissen Metallkolloiden ist vielleicht eine Prüfung möglich. *F. Hund* (Leipzig).